CLAUDII MYDORGII ... PRODROMI CATOPTRICORUM ET...

Claude Mydorge





CLAVDII MYDORGII PATRICII PARISINI PRODROMI CATOPTRICORVM ET DIOPTRICORVM: *SIVE* CONICORVM OPERIS AD ABDITA RADII REFLEXI ET REFRACTI mysteria præuii & facem præferentis.

LIBRI QVATVOR PRIORES.

D. A. L. G.

Ex Libris Recessus SS: Joannis et Pauli de Urbe

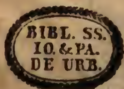


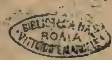


PARISIIS,
Ex Typographia I. DEDIN, via Nucum, sub signo trium Columbarum.

M. DC. XLI.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

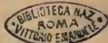




Hactenus commissa vel omissa, si placet, emendabit & restituet Lector beneuolus in hunc qui sequitur modum.

In monito generali pagina 2 *linea* 17 diopticem *repone* dioptricem. *Pag.* 10 *l.* 7 *&* 28, 12 *rep.* 13. *Pag.* 31 *l.* 6 *à fine* BAG *rep.* DAG. *Pag.* 32 *l. vlt.* XD *rep.* XH *Pag.* 33 *l.* 15 *à f.* vt in anteced. *rep.* vt in 20 huius. *Pag.* 34 *l. penultima* vtrinque *rep.* vtrobique *Pag.* 35 *l.* 8. *à f.* anglum *rep.* angulum *Pag.* 36 *l.* 7 partibus contingenti, &c. *rep.* partibus ordinatim applicatæ contiguis à centro & contingente sumptis &c. *Ibid. l.* 3 *à f.* 23 *rep.* 24 *Pag.* 37 *l.* 7, 22 *rep.* 23 *Pag.* 38 *l.* 14, 23 *rep.* 24 *Ibid.* augendi sunt reliqui omnes numeri vnitate. *Pag.* 41 *l.* 4 DE *rep.* DF. *Pag.* 42 *l.* 23 vtrinque *rep.* vtrobique. *Pag.* 46 *l.* 20 ZE *rep.* ZX. *Ibid. l.* 5 *à f.* 28 *rep.* 29 *Pag.* 47 *l.* 13 *&* 14 deficientis *rep.* deficientia *Ibidem l.* 15 *à f.* in N : *rep.* in V: *Pag.* 49 *l.* 1 ex 12 huius, *rep.* ex coroll. ad 13. huius, *Pag.* 50 *l.* 5. *à f.* 14 *rep.* 15 *Pag.* 58 *l.* 2 NL maior *rep.* NS minor, *Pag.* 60 *l.* 16 *à f.* BE, DE *rep.* BC, DE *Pag.* 61 *l.* 3, 12 *rep.* 13 *Pag.* 62 *l. pen.* OH *rep.* OA *Pag.* 66 *l.* 12 AB *rep.* AC *Pag.* 69 *l.* 10 *à f.* rectæ BC, *rep.* rectæ æquidistantes BC, *Pag.* 72 *l.* 20 intra *rep.* inter *Pag.* 74 *l.* 16 & angulum *rep.* aut angulum *Pag.* 75 *l.* 2, 54 *rep.* 53 *Pag.* 79. *l.* 16 *à f.* BAC *rep.* ABC *Pag.* 81 *l.* 7 *à f.* schœma *rep.* schema *Pag.* 83 *l.* 3 *à f.* & 6 *rep.* & 7 *Pag.* 88 *l.* 10 *à f.* eadem parallelæ *rep.* eadem basi BC parallelæ *Pag.* 91. *l.* 4 *à f. dele* & permutatim *Pag.* 92 *l.* 19 respondentia FI, *rep.* respondentia æqualia FI, *Pag.* 95 *l.* 9 differentiæ, hoc est *rep.* differentiæ, vel copulæ, hoc est *Pag.* 100 *l.* 18, 170 *rep.* 180 *Ibid. l.* 9 *à f.* arcum *rep.* arcuum *Pag.* 101 *in* 1. *figura* B, A, H *rep.* B, H, A *Ibid. l.* 8. *à f.* arcus descripti *rep.* arcus centro A descripti *Ibid. l.* 14 *à f.* Poducatur *rep.* Producatur *Pag.* 104 *l.* 12 *à f.* in A, D *rep.* in AD *Pag.* 106 *l.* 6 respondenti *rep.* respondentia *Pag.* 107 *l.* 16 *à f.* CE *rep.* DH *Pag.* 109. *l.* 4 *à f.* coroll. 2 ad 13 *rep.* coroll. ad 33 *Pag.* 116 *l.* 14 occurrens *rep.* occurrente *pag.* 118 *l.* 9, 7 *rep.* 10 *pag.* 119 *l.* 9 *à f.* per F, si opus *rep.* per F ad HD, si opus *pag.* 120 *l.* 9 parametum *rep.* parametrum *Ibidem l.* 12 *à f.* AE *rep.* CE *pag.* 121 *l.* 8 sit *rep.* sic *pag.* 122 *l.* 6 in D sectione *rep.* D in sectione *Ibid. l.* 9 *à f.* Siquidem *repone* Si quidem *pag.* 123 *l.* 19 *à f.* coroll. 2 ad 13 *rep.* coroll. ad 33 *pag.* 153 *l.* 10 eritq; facta *rep.* eritq; ab eodem facta *pag.* 161 *l.* 17 planis secetur *rep.* planis ad easdem verticis partes secetur. *pag.* 164 *l.* 5 basis partium inuicem *rep.* basis partium similiter sumptarum inuicem *pag.* 166 *l.* 16 sint sectæ *rep.* sint ad easdem B & β partes sectæ *Ibidem l.* 26 ad δγ. Dico *rep.* ad δγ : neque ita γδ ad δβ. Dico *pag* 179 *l.* 16 tunc *rep.* nunc *Ibidem* THEOR. XXI. *rep.* XXII. & vsque ad XXXIX augendi vnitate numeri Theorematis præfixi *pag.* 186 *l.* 8 *à f.* æquale *rep.* æqualem *pag.* 228 *l.* 3 *à f.* maiorem *rep.* minorem *pag* 256 *l.* 22 vt BD quadratum *rep.* vt BD ad DA, ita est βδ ad δα : Ideoque vt BD quadratum. *pag.* 260 *l.* 9 *à f.* prohibetur *rep.* probetur *Ibidem l.* 5 *à f.* abstruent *rep.* astruent.

Si quæ alia nondum animaduersa occurrant, tua, Lector, humanitati commendantur.





Hactenus commiſſa vel omiſſa, ſi placet, emendabit & reſtituet Lector beneuolus in hunc qui ſequitur modum.

In monito generali pagina 2 *linea* 17 diopticem *repone* dioptricem. *Pag.*10 *l.* 7 & 28, 12 *rep.* 13. *Pag.* 31 *l.* 6 *à fine* BAG *rep.* DAG. *Pag.* 32 *l. vlt.* XD *rep.* XH *Pag.* 33 *l.* 15 *à f.* vt in anteced. *rep.* vt in 20 huius. *Pag.* 34 *l. penultima* vtrinque *rep.* vtrobique *Pag.* 35 *l.* 8. *à f.* anglum *rep.* angulum *Pag.* 36 *l.* 7 partibus contingenti, &c. *rep.* partibus ordinatim applicatæ contiguis à centro & contingente ſumptis &c. *Ibid. l.* 3 *à f.* 23 *rep.* 24 *Pag.* 37 *l.* 7, 22 *rep.* 23 *Pag.* 38 *l.* 14, 23 *rep.* 24 *Ibid.* augendi ſunt reliqui omnes numeri vnitate. *Pag.* 41 *l.* 4 DE *rep.* DF. *Pag.* 42 *l.* 23 vtrinque *rep.* vtrobique. *Pag.* 46 *l.* 20 ZE *rep.* ZX. *Ibid. l.* 5 *à f.* 28 *rep.* 29 *Pag.* 47 *l.* 13 & 14 deficientis *rep.* deficientia *Ibidem l.* 15 *à f.* in N : *rep.* in V: *Pag.* 49 *l.* 1 ex 12 huius, *rep.* ex coroll. ad 13. huius, *Pag.* 50 *l.* 5. *à f.* 14 *rep.* 15 *Pag.* 58 *l.* 2 NL maior *rep.* NS minor, *Pag.* 60 *l.* 16 *à f.* BE, DE *rep.* BC, DE *Pag.* 61 *l.* 3, 12 *rep.* 13 *Pag.* 62 *l. pen.* OH *rep.* OA *Pag.* 66 *l.* 12 AB *rep.* AC *Pag.* 69 *l.* 10 *à f.* rectæ BC, *rep.* rectæ æquidiſtantes BC, *Pag.* 72 *l.* 20 intra *rep.* inter *Pag.* 74 *l.* 16 & angulum *rep.* aut angulum *Pag.* 75 *l.* 2, 54 *rep.* 53 *Pag.* 79. *l.* 16 *à f.* BAC *rep.* ABC *Pag.* 81 *l.* 7 *à f.* ſchœma *rep.* ſchema *Pag.* 83. *l.* 3 *à f.* & 6 *rep.* & 7 *Pag.* 88 *l.* 10 *à f.* eadem parallelæ *rep.* eadem baſi BC parallelæ *Pag.* 91. *l.* 4 *à f. dele* & permutatim *Pag.* 92 *l.* 19 reſpondentia FI, *rep.* reſpondentia æqualia FI, *Pag.* 95 *l.* 9 differentiæ, hoc eſt *rep.* differentiæ, vel copulæ, hoc eſt *Pag.* 100 *l.* 18, 170 *rep.* 180 *Ibid. l.* 9 *à f.* arcum *rep.* arcuum *Pag.* 101 *in* 1. *figura* B, A, H *rep.* B, H, A *Ibid. l.* 8. *à f.* arcus deſcripti *rep.* arcus centro A deſcripti *Ibid. l.* 14 *à f.* Poducatur *rep.* Producatur *Pag.* 104 *l.* 12 *à f.* in A, D *rep.* in AD *Pag.* 106 *l.* 6 reſpondenti *rep.* reſpondentia *Pag.* 107 *l.* 16 *à f.* CE *rep.* DH *Pag.* 109. *l.* 4 *à f.* coroll. 2 ad 13 *rep.* coroll. ad 33 *Pag.* 116 *l.* 14 occurrens *rep.* occurrente *pag.* 118 *l.* 9, 7 *rep.* 10 *pag.* 119 *l.* 9 *à f.* per F, ſi opus *rep.* per F ad HD, ſi opus *pag.* 120 *l.* 9 parametum *rep.* parametrum *Ibidem l.* 12 *à f.* AE *rep.* CE *pag.* 121 *l.* 8 ſit *rep.* ſic *pag.* 122 *l.* 6 in D ſectione *rep.* D in ſectione *Ibid. l.* 9 *à f.* Siquidem *repone* Si quidem *pag.* 123 *l.* 19 *à f.* coroll. 2 ad 13 *rep.* coroll. ad 33 *pag.* 153 *l.* 10 eritq; facta *rep.* eritq; ab eodem facta *pag.* 161 *l.* 17 planis ſecetur *rep.* planis ad eaſdem verticis partes ſecetur. *pag.* 164 *l.* 5 baſis partium inuicem *rep.* baſis partium ſimiliter ſumptarum inuicem *pag.* 166 *l.* 16 ſint ſectæ *rep.* ſint ad eaſdem B & β partes ſectæ *Ibidem l.* 26 ad δγ. Dico *rep.* ad δγ : neque ita γδ ad δβ. Dico *pag* 179 *l.* 16 tunc *rep.* nunc *Ibidem* THEOR. XXI. *rep.* XXII. & vſque ad XXXIX augendi vnitate numeri Theorematis præfixi *pag.* 186 *l.* 8 *à f.* æquale *rep.* æqualem *pag.* 228 *l.* 3 *à f.* maiorem *rep.* minorem *pag* 256 *l.* 22 vt BD quadratum *rep.* vt BD ad DA, ita eſt βδ ad δα : Ideoque vt BD quadratum. *pag.* 260 *l.* 9 *à f.* prohibetur *rep.* probetur *Ibidem l.* 5 *à f.* abſtruent *rep.* aſtruent.

Si quæ alia nondum animaduerſa occurrant, tua, Lector, humanitati commendantur.

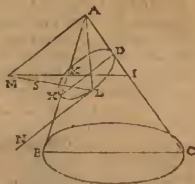


Pag. 24. lin. 7. à fine,

continget. *Adde.* Sed &, in ellipsi, si eidem diametro æquidistat; etiam sectionem in eodem præassumpto puncto contingenti æquidistabit.

Pag. 25. in fine, Add.

Æquidistet iam in ellipsi eiusdem diametro XD recta AM, (quando scilicet punctum L sumptum fuerit in extremo coniugatæ diametri.) Dico & eidem AM rectæ etiam æquidistantem esse rectam NL in eodem L puncto sectionem contingentem.



Quoniam enim planum per MAL Coni superficiem secundum rectam AL, ideoque & ipsam XLD sectionem contingit in L; Quæ à puncto L rectæ AM æquidistans ducetur, vt LN, & in eodem sectionis XLD plano erit, & in ipso per MAL plano ipsam contingente in L. Quare & ipsam XLD sectionem in eodem L puncto continget recta LN. Quod vltimò erat demonstrandum.

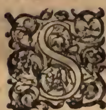


CLAVDII MYDORGII
PATRICII PARISINI
CONICORVM
LIBER PRIMVS.

De Elementis Conicis, siue de Coni sectionum ortu & generatione, ac propria cujusque natura.

DEFINITIONES.

I.



VPERFICIES Conica dicitur, ea quam ducta à manente sublimi puncto per circuli circumferentiam in eodem non existentem plano recta linea interminata, & circa eandem circumferentiam circumducta donec ad idem ejusdem punctum redeat à quo cœpit moueri, describit.

I I.

Vertex superficiei conicæ dicitur, manens punctum à quo educta recta linea superficiem conicam descripsit.

I I I.

Axis superficiei conicæ dicitur, recta linea à vertice conicæ superficiei ad centrum circuli, circa cujus circumferentiam circumducta recta linea eandem superficiem descripsit, perducta.

IIII.

Conicæ ſuperficies oppoſitæ, ſiue ad verticem exiſtentes, dicuntur, quas ſimul eadem recta linea vltra verticem producta, & circa eandem circuli circumferentiam circumducta deſcribit. Ideoque & communem verticem, & axes in directum habent.

V.

Conus autem dicitur, ſolida figura contenta circulo, & conica ſuperficie à vertice ad ejuſdem circuli circumferentiam intercepta.

VI.

Vertex coni idem eſt qui & ſuperficiei conicæ ipſum conum continentis.

VII.

Baſis coni dicitur, circulus ad cujus circumferentiam educta, & circumducta recta linea ſuperficiem conicam deſcripſit.

VIII.

Axis coni dicitur idem qui ſuperficiei conicæ conum continentis. Recta nempè à vertice coni ad centrum circuli, qui ejuſdem eſt baſis, perducta.

IX.

Oppoſiti coni, ſiue ad verticem exiſtentes, dicuntur, qui oppoſitis ſuperficiebus conicis continentur. Ideoque & verticem communem, & axes in directum habent.

X.

Conus rectus dicitur, cujus axis ad rectos ipſius baſi angulos inſiſtit.

XI.

Conus ſcalenus dicitur, cujus axis non ad rectos ipſius baſi angulos inſiſtit.

XII.

Coni ſectionem cum Apollonio intelligimus, lineam in coni ſuperficie, quæ eſt communis plani cujuſpiam conum diuidentis & ejuſdem ſuperficiei ſectio interminata, aut vbique ſibi ipſi continua. Ideoque & in eodem etiam plano exiſtit.

XIII.

Conicam lineam intelligimus, cujuſcunque coni ſectionis portionem.

XIIII.

Rectas lineas in sectione, aut portione, ductas dicimus, quæ vtrinque in ipsa sectione, aut portione, terminantur.

XV.

Diametrum cujuscunque coni sectionis, aut portionis, dicimus, quamcunque rectam lineam intra sectionem ductam, quæ binas quascunque rectas lineas in ipsa sectione, aut portione, ductas inuicem æquidistantes bifariam diuidit. Quæ & intercepta diameter etiam dicetur.

XVI.

Ordinatam autem ad diametrum, siue ordinatim applicatam intelligimus, vnamquamque linearum in coni sectione, aut portione, ductarum ab eadem diametro bifariam sectarum, aut cuipiam bifariam sectæ æquidistantium.

XVII.

Axem cujuscunque coni sectionis, aut portionis, dicimus, diametrum quæ ordinatim ad ipsam applicatas bifariam, & ad angulos rectos, diuidit. Qui & intra sectionem interceptus axis etiam dicetur.

XVIII.

Verticem Coni sectionis, aut portionis, dicimus, terminum cujuscunque diametri qui in ipsa est sectione, aut portione. Diceturque in axe vertex supremus.

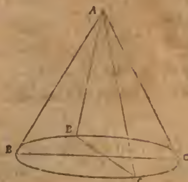
XIX.

Parametrum coni sectionis dicimus, rectam lineam à cujuslibet coni sectionis, aut portionis, vertice eductam ordinatim ad contiguam diametrum applicatis æquidistantem: cui comparantur, & secundum quam æstimantur, & possunt omnes quæcunque à coni sectione, aut portione, ad eandem diametrum ordinatim applicantur. Quæ & recta iuxta quam possunt ad diametrum à coni sectione, aut portione, ordinatim ductæ dicetur. Quæ, si ab axis termino sit educta, recta parameter: sin autem, parameter simpliciter dicetur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.


SI Conus plano per verticem ſecetur; ſectio erit triangulum.

Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, qui plano per verticem A ſecetur, & ſit facta in ſuperficie & baſe coni ſectio B A C: Dico B A C eſſe triangulum.



Quoniam enim A vertex eſt coni, & manens punctum à quo ad circuli B C circumferentiam perducta & circumducta recta linea ipſam A B C coni ſuperficiem deſcribit, eſtque punctum B in ejuſdem circuli circumferentia: erit A B recta linea eadem ei quæ ſuperficiem conicam deſcribit. Eademque ratione & A C recta oſtendetur linea: eſt autem & B C recta linea, communis ſcilicet duorum planorum ſectio: Triangulum igitur eſt B A C ſectio. Quod erat demonſtrandum.

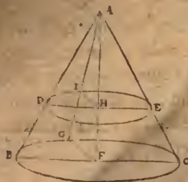
COROLLARIVM.

Hinc patet, Si conus plano per axem ſecetur, ſectionem eſſe triangulum. Quandoquidem axis coni per eiuſdem verticem tranſit.

THEOR. II. PROP. II.

Si conus plano ſecetur æquidiſtante baſi; erit facta in ſuperficie coni ſectio circuli circumferentia.

Sit Conus A B C, cuius vertex A, baſis B C circulus, qui plano ſecetur æquidiſtante baſi quod faciat in ſuperficie ſectionem D I E: Dico D I E eſſe circuli circumferentiam.



Sit enim F centrum circuli qui baſis eſt coni: erit ducta A F axis eiuſdem. Secetur itaque A B C conus plano per axem A F quod ſectionem faciat triangulum B A C: communiſque eiuſdem per axem plani & plani per D I E ſectio ſit recta D E axem A F ſecans in H: Quoniam & planum per D I E baſi coni æquidiſtat, erit

& D E

& D E recta rectæ B C æquidistans: quare vt AF ad F B, ita erit AH ad HD: & vt A F ad F C, ita erit A H ad H E: Igitur, ex æquali, vt F C ad F B, ita erit HE ad HD. Estque F B æqualis F C: quare & D H æqualis erit H E. Sumpto autem in BC circuli circumferentia puncto quolibet G, ducatur A G quæ erit in superficie coni, ideoque & DIE sectioni occurret; occurrat igitur in I, iunganturque IH, GF. Quoniam igitur planum per D I E plano per B G C æquidistat; erunt amborum communes cum plano per A F G sectiones, scilicet H I, GF, æquidistantes inuicem. Quare vt A F ad F G, ita erit A H ad HI. Sed vt A F ad F B, ita etiam est A H ad H D : igitur, ex æquali, vt F G ad F B, ita erit H I ad H D. Estque punctum G in circuli circumferentia, ideoque & F G æqualis F B, quoniam & F centrum est: quare & H I erit æqualis H D. Sunt igitur æquales H I, H D, H E. Similiterque & ad quodcumque aliud sumptum in sectione D I E punctum recta ab H ducta ipsis H D, H F æqualis ostendetur. Circuli igitur circumferentia erit D I E sectio, eiusque centrum H. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Hinc, & ex definitionibus, patet Figuram circulo, cuius circumferentia est D IE, & superficie conica ad verticem A contentam, conum esse.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I.

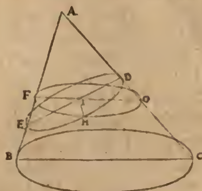
Subcontrariam positionem dicimus, quando bina triangula similia ad communem verticalem angulum posita bases habent non parallelas. Ideoque & ipsa triangula dicentur subcontrariè posita. Atque etiam bases subcontrariè inuicem positæ.

I I.

Subcontrariam coni sectionem dicimus, siue conus secetur duobus planis ad idem per axem triangulum rectis, & ab ipso ad verticem abscindentibus bina triangula similia, sed subcontrariè posita. Siue conus per axem iam sectus plano ad basim recto, rursus secetur plano ad triangulum per axem recto, & ab ipso ad verticem abscindente triangulum simile, sed subcontrariè positum.

Theor. III. Prop. III.

Si conus ſcalenus plano ſecetur ſubcontrariè baſi; erit facta in ſuperficie coni ſectio circuli circumferentia.



Sit conus ABC ſcalenus, cuius vertex A, baſis B C circulus, plano per axem ad rectos baſi BC angulos ſectus faciente triangulum B A C: qui rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, quod ab ipſo abſcindat ad verticem triangulum D A E ſimile, ſed ſubcontrariè poſitum: & faciat in coni ſuperficie ſectionem D H E: Dico D H E eſſe circuli circumferentiam.

Sit enim communis plani per D H E, & trianguli BAC ſectio recta D E: & ſumpto in ipſa puncto I quocumque, ducatur per I ipſi B C æquidiſtans recta FIG, per quam planum agatur conum ABC ſecans, eiuſque baſi æquidiſtans, quod communem cum ſuperficie ſectionem faciat curuam lineam F H G, & cum plano per D H E rectam I H: erit igitur ex anteced. F H G ſectio circuli circumferentia eiuſque diameter F G: & quoniam vtrumque per D H E & F H G planum ad triangulum B A C rectum eſt; erit communis amborum ſectio recta I H ad idem B A C triangulum, ideoque & ad vtramque D F, F G rectam perpendicularis. Propter ſimilitudinem autem triangulorum DAE & BAC, hoc eſt FAG, erit angulus ad G angulo ad E æqualis. Suntque verticales ad I etiam æquales: quare & reliquus ad F angulus reliquo ad D æqualis erit: ideoque & triangulum D I G triangulo FIE ſimile. Itaque vt D I ad I G, ita erit F I ad I E. Rectangulum igitur D I E rectangulo F I G æquale erit. Sed quoniam diameter eſt F G, & perpendicularis H I, punctumque H in circuli circumferentia; rectangulo FIG æquale erit quadratum H I: quare & rectangulo D I E etiam æquale erit idem H I quadratum. Punctum igitur H in circuli circumferentia erit, cuius ſit diameter D E. Similiter autem & perpendicularis H I ad ſectionem D H E productæ pars eadem ſectione & puncto I intercepta oſtendetur poſſe idem D I E ſub D E diametri partibus rectangulum: ſectio igitur D H E circuli erit circumferentia: eiuſque diameter recta D E. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

Atque hinc etiam, & ex definit. patet Figuram circulo, cuius ſit circumferentia D H E, & ſuperficie conica ad verticem A contentam, etiam conum eſſe.

DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

Parabolam dicimus, quamcumque coni ſectionem, cuius diameter alterutri crurum trianguli per axem ſecti coni æquidiſtat.

II.

Hyperbolam dicimus, quamcunque coni ſectionem, cuius diameter producta alterutri crurum trianguli per axem ſecti coni vltra verticem occurrit.

III.

Ellipſim dicimus, quamcunque coni ſectionem, cuius diameter vtrique crurum trianguli per axem ſecti coni infrà verticem occurrit, eiuſdem baſi neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſita.

IIII.

Oppoſitas ſectiones dicimus, binas hyperbolas in oppoſitis ſuperficiebus ab vno eodemque plano non per verticem ſectis factas.

V.

Tranſuerſam diametrum dicimus, rectam lineam quæ in hyperbola interceptæ cuilibet diametro in directum eſt poſita, vel in ellipſi ipſa eſt intercepta diameter continuata, & vtrobique vtroque trianguli per axem ſecti coni crure intercipitur. Quæ & in oppoſitis ſectionibus, vel ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, cum ſit diameter, vtrinque etiam à ſectione terminatur. Quæ ſi intercepto axi ſit in directum, aut ſit ipſe axis continuatus, tranſuerſus etiam axis dicetur.

VI.

Centrum coni ſectionis dicimus, punctum in quod diametri omnes concurrunt. Quodque tranſuerſam quamcunque diametrum bifariam diuidit.

VII.

Figuras hyperbolarum, vel ellipſium, veluti & circuli circumferentiarum, dicimus, parallelogramma ſub earumdem ſectionum tranſuerſis diametris, & contiguis parametris contenta. Quarum illæ tranſuerſa dicentur latera, hæ coefficientia.

VIII.

Secundam diametrum dicimus, rectam lineam quæ in ellipsi, vel in oppositis sectionibus, veluti & in circuli circumferentia, ordinatim ad aliquam diametrum applicatis æquidistans per centrum ducta, & ab ipso bifariam secta, media proportionalis est inter latera figuræ ad eandem diametrum factæ.

IX.

Coniugatas diametros dicimus, binas rectas lineas in ellipsi, vel in oppositis sectionibus, veluti & in circuli circumferentia, per centrum ductas, quarum vtraque diameter est, & rectas lineas alteri æquidistantes vtrinque sectione terminatas bifariam diuidit: Quare si etiam ad angulos rectos; coniugati axes dicentur: & in ellipsi, etiam extremæ diametri.

X.

Principalem coni sectionis diametrum, siue diametrum ex generatione, aut ex coni sectione, dicimus, rectam lineam quæ plani trianguli per axem secti cuiuslibet coni, & plani secantis, ipsamque in superficie coni sectionem generantis, communis est sectio in ipso cono facta. Vnde & ipsi respondens, siue contigua, parameter etiam principalis dicetur: vt & transuersa diameter principalis: & ex ipsis constantes figuræ etiam principales: & coniugatæ diametri principales.

XI.

Assumptas coni sectionum diametros, aut parametros, dicimus diametros omnes & parametros quæcunque ad principales primò positas, aut ad axes sectionum comparantur. Ideoque & assumptæ figuræ etiam, & assumpta earumdem latera, & assumptæ coniugatæ diametri nonnunquam occurrent.

XII.

Vmbilicum parabolæ dicimus, punctum in eiusdem axe intra sectionem signatum, à supremo vertice distans spatio quadrantis rectæ parametri.

XIII.

Vmbilicos hyperbolarum & ellipsium dicimus, puncta in earumdem vniuscuiusque axe signata, ab vnoquoque transuersi axis termino distantia spatio rectæ, cuius quadrato

rectangulum

rectangulum æquale quartæ parti figuræ, sub eodem axe transuerso & recta parametro factæ, ipsi transuerso axi applicatum in hyperbola quidem excedit, & in ellipsi deficit.

Notum autem suo fiet loco, ejusmodi vmbilicos puncta esse à quibus ipsæ in plano expositæ, aut etiam describendæ, sectiones ortum, & incrementum sument.

MONITVM.

Hujus loci ratio à nobis exigere videtur, vt de ipsarum coni sectionum proprijs nominibus quædam adnectamus notatione digna.

Quanquam enim veteribus geometris notæ fuerunt coni sectiones: non tamen omnifariè ipsis innotuerunt, nec in omni cono. In solo enim recto & rectangulo cono ipsis cognita fuit parabola, sub recti & rectanguli coni sectionis nomine. In solo recto & obtusiangulo cono hyperbola, sub recti & obtusianguli coni sectionis appellatione. In solo denique recto & acutiangulo cono ellipsis, recti & acutianguli coni sectio ipsis dicta. Primus omnium Apollonius Pergæus geometra insignis omnes hujusmodi coni sectiones in omni cono considerauit. Et quæ antiquioribus dicta fuit recti rectangulique coni sectio, eandem nouit & acutianguli, & obtusianguli coni esse, siue recti, siue scaleni. Quæque acutianguli recti coni, eandem & rectanguli & obtusianguli vtriusque coni esse sectionem. Quò itaque singulas ab inuicem discerneret, proprijs eas nominibus ornauit: vnamque parabolam, alteram hyperbolam, tertiam denique ellipsim appellauit. Vnde autem ipsis nomina hujusmodi comparauerit, satis tribus primi suorum Conicorum libri propositionibus, vndecima scilicet, duodecima, & decimatertia indicauit. Vbi, rectas à singulis dictis sectionibus ad principales diametros ordinatim applicatas expendens: inuenit, & demonstrauit in parabola quidem ipsarum quadratis æqualia rectangula, latitudines habentia contiguis interceptis diametri portionibus æquales, ad aliquam rectam (quæ ipsi sectionis recta est diameter, siue rectum latus, nobis verò parameter,) applicata neque eam excedere, neque ab eadem deficere, sed ipsi conuenire: quæ nostra est proposit.10. hujus. Vnde & eidem sectioni, ex ejusmodi conuenienti applicatione, illud idem speciale & proprium

applicationis, siue parabolæ nomen indidit. Sed cum in binis reliquis sectionibus deprehendisset, ordinatim applicatarum quadratis æqualia istiusmodi rectangula ad sectionis parametrum applicata, in hyperbola quidem ipsam excedere, in ellipsi verò ab eadem deficere figura simili similiterque posita ei quæ à transuersa diametro, & contigua parametro continetur: quæ nostra est propos. 12 hujus: indidem illis propria excessus & defectus nomina fecit, hanc ellipsim, illam hyperbolam vocitans.

Illud ipsum autem etiam nos expendentes, non potuimus non moueri cur Apollonius qui, dum specialem & propriam cujusque coni sectionis naturam prosequitur, vbique, cum de hyperbola & ellipsi coniunctim egit, eis tertiam, vt coni sectionem, copulauit circuli circumferentiam: cum tamen de nominibus ipsis imponendis cogitauit, tres tantùm prædictas coni sectiones agnouisse videtur: quas à triplici tantùm rectangulorum ad rectam quampiam applicatione, ab æqualitate scilicet aut conuenientia, ab excessu, & à defectu indigetauit: quasi à propria aliqua, & speciali natura cuique sectioni nomen imponens. Nulla habita circuli circumferentiæ ratione: quæ tamen & ipsi coni sectio est; vt è propositionibus quarta, & quinta prioris sui libri constat, (quibus respondent nostræ 2. & 3. hujus) suasque transuersas diametros, & parametros, ideoque & figuras ab ipsis constantes habens, hanc etiam æquè ac ellipsis sibi propriam assumit naturam, vt in ipsa ordinatarum quadratis æqualia rectangula, latitudines habentia interceptis diametri portionibus æquales, ad contiguas parametros applicata, semper deficiant figura simili, similiterque posita ei quæ à transuersa diametro, & eadem parametro constituitur. Quod ex eadem 12. hujus fiet manifestum. Vnde sibi etiam proprium defectus, siue ellipsis nomen iure vindicare poßit: & quidem ellipsis vniformis, quò à vulgari multiformi ellipsi distingui valeat.

Veruntamen, ne tam noua nunc agere nos, & proponere, quàm iam inuenta & acta recolere, atque ad communes vsus disponere, videri voluisse insimulemur: sua impositi nominis laus integra Apollonio in hac parte manebit. Namque & iisdem nominibus sunt à nobis insignitæ prædictæ sectiones. Atque insuper ne quem vel tantillùm offendat detectus scrupulus, hoc monemus. Quanquam & circuli circumferentia coni sectio videri poßit; facta scilicet à plano aut æquidistante basi, aut eidem subcontrariè posito: tamen, quoniam hæc sectio non tam

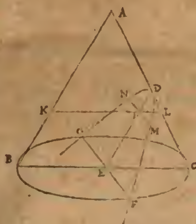
conum diuidit, quàm ipsum restituit, (vt è corollarijs primis ad 2, & 3 hujus patet.) Ideò neque circuli circumferentiam propriè coni esse sectionem, neque proprium illi defectus aut ellipsis nomen iure competere visum nobis fuisse. Vnde neque coniunctim in sequentibus hyperbolæ & ellipsi copulabitur à nobis, sed disiunctim, & comparatiuè tantùm: suumque priuatum ideò feret aliquando examen, quatenus proposito iam satisfactum non fuerit in Euclideis Elementis.

Cæterùm, quas aliundè impositorum prædictis coni sectionibus nominum causas Eutocius Ascalonita ad Apollonij Conica annotauit, ab æqualitate, excessu, aut defectu angulorum ab ipsis sectionum principalibus diametris cum triangulorum per axem alterutro crure comprehensorum, vnà cum ejusdem trianguli verticis angulo: quoniam vnius anguli æquales sint duobus rectis, alterius majores, tertiæ denique minores: siue, quòd vnius diameter sit vni crurum trianguli per axem parallela, alterius excedat ejusdem trianguli verticem, & tertia sit quasi circulus diminutus: illa tantò magis nobis probanda videtur, si modò à coni sectionibus circuli circumferentiam excludas, quantò hæc posterior ridicula, & Eutocio indigna. Vt & incongrua hujusmodi lineæ ad planum comparatio; cum ellipsim ait circulum diminutum: ipsum circulum conicæ lineæ æquiparans, quæ prolata potiùs circuli circumferentia dici velit.

His itaque præmonitis, & ad conicas definitiones appositis, ad ipsas iam coni sectiones dignoscendas deinceps pergendum censemus: hac quàm proximè monstramus via & methodo, non ipsa quidem Apolloniana, attamen propria, facili, & maximè simplici. Quandoquidem & ipse Apollonius non aliter singulas coni sectiones proprio nomine cognitas facit, quàm expensa priùs & cognita propria rectæ cujuspiam cuique sectioni inscriptæ natura. Nos è præmissis definitionibus singulas arguentes, & proprio nomine notantes: inscriptarum vnicuique, vel etiam adscriptarum rectarum propriam naturam consequenter & necessariò demonstramus esse ejusmodi, qualem ipse Apollonius expreßit. Quæ autem proximè sequetur propositio; quanquam Conicorum ordine quarta, certè coni sectionum prima censeri non immeritò debeat.

THEOR. IIII. PROP. IIII.

Si conus plano per axem ſecetur, ſeceturque & altero plano quod baſim coni ſecet ſecundum rectam lineam quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio ſit alterutri crurum ejuſdem trianguli æquidiſtans; erit facta in ſuperficie coni ſectio parabola: ejuſque diameter communis plani ſecantis & trianguli per axem ſectio.



Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, qui plano per axem ſecetur quod faciat triangulum B A C: ſeceturque & altero plano, ſecundum lineam F G quæ ſit ad B C perpendicularis, quod faciat in ſuperficie coni ſectionem F D G: communis autem plani ſecantis, & trianguli B A C ſectio ſit recta linea D E, quæ ſit æquidiſtans A B: Dico factam in ſuperficie coni ſectionem F D G eſſe parabolam, ejuſque diametrum eſſe rectam D E.

Sumpto enim in D E quolibet puncto I, ducatur per I ipſi B C parallela K I L, & per K L planum agatur baſi coni æquidiſtans, quod faciat in ſuperficie coni ſectionem K M L N: erit vtique, ex 2 hujus, ſectio K M L N circuli circumferentia, cujus diameter erit K L: ejuſdemque & plani per F D G communis ſectio recta M I N erit ipſi F G æquidiſtans: ideoque & ad K L perpendicularis. Eſt autem & F G ad B C baſis coni diametrum perpendicularis. Secta igitur eſt vtraque F G, M N bifariam in E, & I. Quare, ex definitionibus, recta D E ſectionis F M D G erit diameter. Eſtque æquidiſtans A B cruri trianguli per axem: ſectio igitur F M D G, ex iiſdem definit. erit parabola, cujus vertex D, & diameter erit D E. Quod erat demonſtrandum.

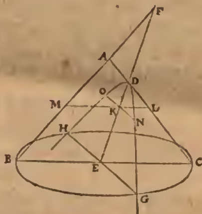
COROLL.

Hinc, & ex definit. patet Vtramque F E, M I, veluti & G E, N I, eſſe à ſectione F D G ad diametrum D E ordinatim applicatam.

THEOR. V.

THEOR. V. PROP. V.

Si conus plano per axem ſecetur, ſeceturque & altero plano quod baſim coni ſecet ſecundum lineam rectam quæ ſit ad baſim trianguli per axem perpendicularis: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio alterutri crurum ejuſdem trianguli vltra verticem producto occurrat; erit facta in ſuperficie coni ſectio hyperbola, cujus erit diameter communis plani ſecantis & trianguli per axem ſectio.



Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis BC circulus, qui plano per axem ſecetur, quod faciat ſectionem triangulum B A C: ſeceturque & altero plano ſecundum lineam G H perpendicularem ad B C, quod faciat in ſuperficie coni ſectionem G D H: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio ſit recta linea D E, quæ cruri A B vltra verticem A producto occurrat in F: Dico factam in ſuperficie coni ſectionem G D H eſſe hyperbolam, ejuſque diametrum eſſe rectam D E.

Sumpto enim in D E quolibet puncto K, ducatur per K ipſi B C æquidiſtans recta M K L, per quam planum agatur baſi coni æquidiſtans quod faciat in ſuperficie ſectionem M N L O. Circuli igitur circumferentia erit M N L O, ejuſque diameter M L: & communis plani per M N L O cum plano per G D H ſectio, nempè recta NKO, erit ipſi G H æquidiſtans. Quare & perpendicularis erit N O ad M L, quoniam & G H eſt ad B C perpendicularis. Eſt autem & B C baſis coni diameter. Vtraque igitur GH, NO ſecta erit bifariam in E, & K. Ideoque & ſectionis G N D H diameter erit recta D E ex definit. Sed cruri A B vltra verticem A producto occurrit in F: ſectio igitur G N D H ex ijſdem definit. erit hyperbola, ejuſque vertex D, & diameter D E. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

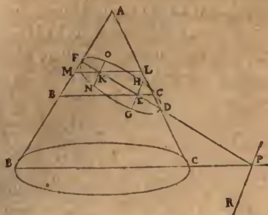
Hinc etiam, & ex definit. patet Vtramque G E, N K, veluti & H E, O K, eſſe à ſectione G N D H ad D E diametrum ordinatim applicatam: rectamque D F, ipſi D E

diametro in directum positam, ejusdem sectionis, siue hyperbolæ GNDH transuersam esse diametrum.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si conus plano per axem secetur, seceturque & altero plano quod basim coni, aut ejus planum productum, secet secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem, aut ad eam quæ ipsi in directum est, sit perpendicularis: communis autem plani secantis, & trianguli per axem sectio vtrique crurum ejusdem trianguli infra verticem occurrat, basi non æquidistans, neque subcontrariè posita: conusque, si opus est, produci intelligatur; erit facta in superficie coni sectio ellipsis, cujus erit diameter communis plani secantis & trianguli per axem sectio.

Sit conus ABC, cujus vertex A, basis BC circulus, qui plano per axem secetur faciente triangulum BAC: seceturque & alio plano secante basim coni, aut planum ejus productum, secundum lineam GH, aut PR, quæ ad BC, aut ad CP ipsi in directum positam, sit perpendicularis: & sit facta in superficie coni sectio GFH: communis autem plani secantis & trianguli per axem sectio sit linea FE, aut FD, quæ vtrique AB, AC cruri occurrat in D, & F, & basi BC non sit æquidistans, neque subcontrariè posita: Dico factam in superficie coni sectionem GFH esse ellipsim, ejusque diametrum esse rectam FE, aut FD.



Sumpto enim in FE quolibet puncto K, ducatur per K recta MKL æquidistans BC. Perque ML planum agatur basi coni æquidistans, quod faciat in superficie sectionem MNLO. Erit igitur, ex 2 hujus, MNLO circuli circumferentia, cujus erit diameter ML. Communis autem plani per MNLO cum plano GFH, aut FPR, sectio sit recta NKO: erit NKO ipsi GH, aut PR æquidistans: ideoque & ad ML perpendicularis. Secta igitur erit NO bifariam in K. Eademque ratione & GH ipsi NO æquidistans secta erit bifariam in E. Quare, ex definit. recta FKE sectionis GFHD erit diameter. Sed vtrique cruri AB, AC infra verticem A occurrit,

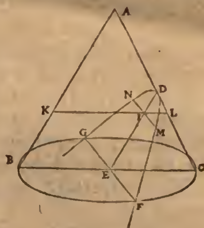
& non eſt baſi BC æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſita: ſectio igitur GFHD, ex ijſdem definit. erit ellipſis, cujus vertex vterque erit F & D, & diameter FE, aut FD. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Atque hinc etiam, & ex definit. ſequitur Vtramque GE & NK, veluti & HE, OK, eſſe à ſectione GFDH ad diametrum FE ordinatim applicatam: rectamque FD ejuſdem ſectionis, ſiue ellipſeos GFHD tranſuerſam eſſe diametrum.

THEOR. VII. PROP. VII.

In omni parabola, ſi à ſectione ad diametrum binæ rectæ lineæ ſint ordinatim applicatæ; erunt quadrata ipſarum ad inuicem, vt contiguæ ab ipſis interceptæ ad verticem diametri portiones.



Exponantur eadem quæ in 4 hujus, vbi à ſectione, ſiue parabola FDG ordinatim ad diametrum DE ſunt applicatæ FE, MI: Dico vt DE ad DI, ita eſſe FE quadratum ad quadratum MI.

Quoniam enim vtraque BC, KL diameter eſt circuli: & ſunt perpendiculares FE, MI: (hoc enim iam oſtenſum eſt) erunt ſingulis BEC, KIL rectangulis æqualia ſingula FE, MI quadrata. Quare erit BEC rectangulum ad KIL rectangulum, vt FE quadratum ad MI quadratum. Sed propter æquidiſtantes AB, DE, recta KI rectæ BE eſt æqualis. Igitur BEC rectangulum ad KIL rectangulum erit, vt EC recta ad rectam IL: hoc eſt, vt DE ad DI. Quare, vt DE ad DI, ita erit FE quadratum ad MI quadratum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

In omni hyperbola, vel ellipſi, vt & in circuli circumferentia, ſi à ſectione ad interceptam diametrum binæ rectæ lineæ ordinatim ſint applicatæ; erunt quadrata ipſarum ad inuicem, vt rectangula ſub contiguis diametri portionibus ab vtroque tranſuerſæ termino ſumptis ad inuicem.

Exponantur eadem quæ in 5 & 6 hujus, vbi à ſectione GDH ad

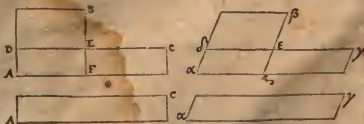
diametrum D E ordinatim ſunt applicatæ G E, N K : Dico vt rectangulum F E D ad rectangulum F K D, ita eſſe quadratum G E ad quadratum N K.

Quoniam enim vtraque B C, M L diameter eſt circuli, & ad eas ſunt perpendiculares G E, N K, vt ibidem oſtenſum eſt: erunt ſingulis G E, N K quadratis æqualia ſingula B E C, M K L rectangula. Ideoque erit G E quadratum ad N K quadratum, vt BEC rectangulum ad MKL rectangulum. Sed ratio BEC rectanguli ad rectangulum MKL compoſita eſt ex ratione BE ad MK, hoc eſt F E ad F K, & ex ratione E C ad K L, hoc eſt, E D ad K D: compoſita igitur F E D rectanguli ad F K D rectangulum ratio eadem eſt compoſitæ B E C rectanguli ad M K L rectangulum. Igitur vt rectangulum F E D ad rectangulum F K D, ita erit quadratum G E ad N K quadratum. Quod erat demonſtrandum.

Quod autem hîc in hyperbola, & ellipſi demonſtratum eſt, verum etiam eſſe iam conſtat ex element. geomet. in circuli circumferentia: vbi ſingularum à circumferentia ad diametrum ordinatim ductarum, vt hîc G E, N K, quadrata ſunt ſingulis rectangulis ſub diametri partibus, vt F E D, F K D, æqualia.

Lemma I. Prop. IX.

Si ſit quadratum quodlibet, & rhombus quadrato æquilaterus: atque etiam rectangulum quodcunque, & parallelogrammum ipſi æquilaterum, rhomboque æquiangulum; vt quadratum ad rectangulum, ita erit rhombus ad parallelogrammum: & conuerſim.



Sit quadratum A B, & rectangulum A C, itemque rhombus $\alpha\beta$, & parallelogrammum $\alpha\gamma$, rhombo $\alpha\beta$ æquiangulum: ſit autem & rhombus $\alpha\beta$ quadrato A B æquilaterus, & parallelogrammum $\alpha\gamma$ rectangulo A C æquilaterum: Dico vt quadratum

quadratum A B ad rectangulum A C, ita esse rhombum $\alpha\beta$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$.

Ad communes enim A & α angulos componantur rectangulum quidem A C quadrato A B, & parallelogrammum $\alpha\gamma$ rhombo $\alpha\beta$. Sitque quadrati A B latus A F: & rhombi, $\alpha\zeta$. Igitur propter æquales A F, $\alpha\zeta$, itemque A D, $\alpha\delta$, erit vt A B quadratum ad D F rectangulum, ita $\alpha\beta$ rhombus ad $\delta\zeta$ parallelogrammum: & vt A E, hoc est D F, rectangulum ad A C rectangulum, ita parallelogrammum $\alpha\epsilon$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$. Igitur, ex æquali, vt A B quadratum ad A C rectangulum, ita erit $\alpha\beta$ rhombus ad $\alpha\gamma$ parallelogrammum. Et conuersim. Quod erat demonstrandum.

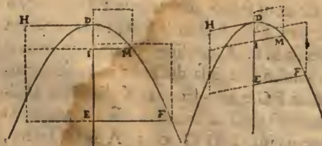
COROLL.

Hinc patet, & Si sint bina rectangula, & bina parallelogramma binis rectangulis æquilatera, & inuicem æquiangula; ita esse bina parallelogramma inuicem, vt bina rectangula inuicem.

THEOR. IX. PROP. X.

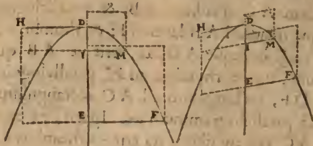
In omni parabola, si à vertice sectionis recta sit ordinatim ad diametrum applicatis ducta æquidistans, quæ se habeat ad quamlibet interceptam ejusdem diametri portionem, vt quadratum contiguæ ordinatim applicatæ ad ejusdem interceptæ diametri portionis quadratum; erunt singularum omnium ab eadem sectione ad eandem diametrum ordinatim applicatarum quadratis, vel rhombis, æqualia singula rectangula, vel parallelogramma, eidem rectæ à vertice ductæ adjacentia, latitudinesque aut latera habentia interceptas diametri portiones à vertice.

Sit parabola F D, cujus vertex D, & diameter D E ad quam à sumpto quolibet in sectione puncto F sit ordinatim applicata recta F E, cui æquidistans à vertice ducta sit D H,



quæ se habeat ad D E, vt F E quadratum ad E D quadratum: à quolibet autem alio in sectione puncto M ipsi F E æquidistans ducatur M I: ordinatim igitur applicata erit M I. Dico rectangulum vel parallelogrammum H D I quadrato vel rhombo ex M I esse æquale.

Quoniam enim vt FE quadratum ad DE quadratum, ita eſt HD ad DE, hoc eſt ita HDE rectangulum ad DE quadratum; erit quadrato FE æquale rectangulum HDE. Itemque, ex anteced. rhombo ex FE æquale HDE parallelogrammum ipſi æquiangulum. Sed vt FE quadratum ad MI quadratum, ita, ex 7 hujus, eſt recta DE ad rectam DI, hoc eſt ita HDE rectangulum ad HDI rectangulum: igitur, permutando, vt FE quadratum vel rhombus ad HDE rectangulum vel parallelogrammum, ita erit MI quadratum vel rhombus ad HDI rectangulum vel parallelogrammum. Eſtque quadrato vel rhombo FE æquale oſtenſum rectangulum vel parallelogrammum HDE: igitur & quadrato vel rhombo ex MI erit æquale rectangulum vel parallelogrammum rhombo æquiangulum HDI. Quod erat demonſtrandum.



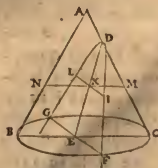
Coroll.

Hinc patet, & ex definit. Rectam DH eſſe ſectionis ſiue parabolæ FMD parametrum, ſiue iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ad eandem DE diametrum ordinatim applicantur.

Theor. X. Prop. XI.

Si in coni ſectione diameter quampiam rectam lineam bifariam ſecet; & omnes ipſi æquidiſtantes in eadem ſectione ductas bifariam quoque ſecabit.

Sit coni ſectio quæcunque FDG, cujus diameter DE: ductaque FEG recta bifariam ſecta ſit in E. A quolibet autem alio ſectionis puncto I in ipſa ducta ſit recta IL æquidiſtans FG quam ſecet in K diameter DE: Dico rectam IL bifariam eſſe ſectam in K:



Sit enim FDG coni ABC ſectio, cujus baſis & plani ſectionem FDG facientis communis ſectio ſit recta FG. Seceturque rurſus ABC conus per axem, & per lineam BC quæ ſit ad FG perpendicularis, plano quod faciat ſectionem triangulum BAC: & per K ducatur NKM æquidiſtans BC. Perpendicularis igitur erit

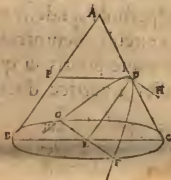
IKL ad NM. Sed secto ABC cono planó per rectas NM, KI, erit sectio NIML basi æquidistans, ideoque &, per 2 hujus, circuli circumferentia, cujus erit diameter NKM: bifariam igitur secta erit recta IL in K. Quod erat demonstrandum.

Coroll.

Hinc patet, Rectam quamcunque in coni sectione à diametro bifariam sectam ad eandem diametrum esse ordinatim applicatam.

Theor. XI. Prop. XII.

Si conus plano per axem sectus, rursus alio plano secetur secundum lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: & sit formata in superficie coni sectio parabola; quæ erit ratio rectanguli sub trianguli per axem cruribus ad basis ejusdem quadratum, eadem erit & rectæ vtroque sectionis & coni vertice interceptæ ad contiguam sectionis parametrum.



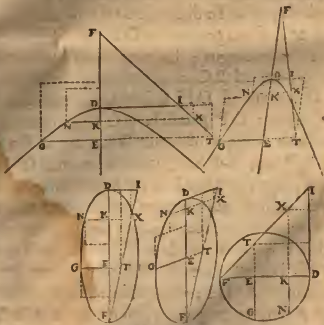
Sit conus ABC, cujus vertex A, basis BC circulus; plano per axem sectus faciente triangulum BAC: qui rursus plano secetur secundum lineam FG quæ sit ad basim BC perpendicularis; & sit formata in superficie coni sectio FDG parabola, cujus sit diameter DE: sit autem & eiusdem parameter DH ipsi DE diametro contigua: Dico vt BAC rectangulum ad BC quadratum, ita esse AD rectam ad DH sectionis parametrum.

Ducatur DP parallela BC. Quoniam igitur sectio FDG est parabola, eiusque diameter DE; erit DE æquidistans AB: ideoque & DP æqualis BE. Quoniam autem BC circuli diameter est, & ad eam perpendicularis FG; erit FG bifariam secta in E: quare & ad DE diametrum ordinatim applicata, ex anteced. Quadrato igitur EF erit, ex 10 huius, rectangulum EDH æquale: & vt DE quadratum ad EF quadratum, hoc est BEC rectangulum, ita erit DE ad DH: hoc est sumpta AD communi altitudine, ita ADE rectangulum ad ADH rectangulum: &, permutando, vt DE quadratum ad ADE rectangulum, hoc est vt ADE rectangulum ad AD quadratum, ita erit BEC rectangulum ad ADH rectangulum: rursusque permutando, vt ADE rectangulum ad BEC rectangulum, ita erit AD quadratum ad ADH rectangulum: hoc est ita AD

ad DH. Sed ratio ADE rectanguli ad BEC rectangulum composita est ex ratione AD ad BE, siue DP, hoc est AC ad CB: & ex ratione DE ad EC, hoc est AB ad BC: quare, componendo, vt ADE rectangulum ad BEC rectangulum, ita erit BAC rectangulum ad BC quadratum. Igitur vt BAC rectangulum ad BC quadratum: ita erit AD ad DH. Quod erat demonstrandum.

Theor. XII. Prop. XIII.

In omni hyperbola, vel ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, si à vertice sectionis recta sit ordinatim ad diametrum applicatis ducta æquidistans, quæ se habeat ad transuersam diametrum, vt cujuslibet ordinatim applicatæ quadratum ad rectangulum sub contiguis diametri portionibus ab vtroque transuersæ termino sumptis; erunt singularum omnium ab eadem sectione ad eandem diametrum ordinatim ductarum quadratis vel rhombis æqualia singula rectangula vel parallelogramma eidem rectæ à vertice ductæ adiacentia, latitudinesque aut latera habentia interceptas à vertice diametri portiones, & in hyperbola quidem excedentia, in ellipsi autem, veluti & in circuli circumferentia, deficientia figuris similibus similiterque positis ei quæ à transuersa diametro, & eadem recta à vertice ducta formatur.



Sit hyperbola, aut ellipsis, veluti & circuli circumferentia GD, cujus vertex D, transuersa diameter FD: & à quolibet in sectione puncto G sit ordinatim applicata GE: & vt FED rectangulum ad EG quadratum, ita sit FD ad DI: sitque DI ducta ipsi EG æquidistans: iungaturque FI, quæ in hyperbola producatur: à quolibet autem alio in sectione puncto N ipsi GE æquidistans ducatur NK, quæ, producta vbi opus, occurrat FI in X: ordinatim igitur

igitur applicata eſt N K. Dico rectangulum vel parallelogrammum D X ipſi D I adiacens, latitudinemque aut latus habens D K, & in hyperbola quidem excedens, at in ellipſi, vt & in circuli circumferentia, deficiens ſigura I X ſimili ſimiliterque poſita ei quæ rectis F D, D I formatur, quadrato ſiue rhombo N K eſſe æquale.

Producatur G E donec occurrat F I in T. Quoniam igitur eſt F D ad D I, vt F E D rectangulum ad E G quadratum: & vt F D ad D I, ita eſt F E ad E T, hoc eſt ita rectangulum F E D ad rectangulum D E T: erit vt F E D rectangulum ad E G quadratum, ita F E D rectangulum ad D E T rectangulum. Quadrato igitur E G æquale erit rectangulum D E T: vel, ex 9 hujus, rhombo E G æquale DET parallelogrammum ipſi æquiangulum. Sed vt F D ad DI, ita eſt etiam F K ad K X: & ita F K D rectangulum ad rectangulum D K X: igitur vt F E D rectangulum ad rectangulum D E T, ita erit F K D rectangulum ad rectangulum D K X: &, permutando, vt F E D rectangulum ad F K D rectangulum, ita D E T rectangulum ad rectangulum D K X. Vt autem F E D rectangulum ad F K D rectangulum, ita eſt, ex 8 hujus, quadratum G E ad quadratum N K: igitur vt quadratum G E ad quadratum N K, ita erit rectangulum D E T ad rectangulum D K X: &, permutando, vt E G quadratum vel rhombus ad rectangulum vel parallelogrammum D E T rhombo æquiangulum, ita erit N K quadratum vel rhombus ad rectangulum vel parallelogrammum D K X. Eſtque iam quadrato ſiue rhombo ex G E æquale oſtenſum rectangulum aut parallelogrammum D E T. Quare & quadrato ſiue rhombo ex N K æquale etiam erit rectangulum aut parallelogrammum D X. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. I.

Hinc igitur, & ex definit. patet Rectam D I dictarum ſectionum eſſe parametrum, hoc eſt ad quam comparantur, & iuxta quam poſſunt rectæ quæ à dictis ſectionibus ad eandem D E diametrum ordinatim applicantur. Quæ & figuræ F D I latus dicitur coefficiens ad F D ejuſdem tranſuerſum latus.

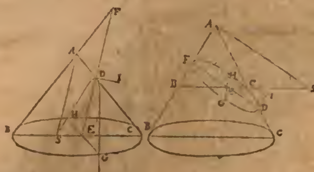
Coroll. II.

Sed & hoc etiam fit manifeſtum In hyperbola, vel ellipſi, vt & in circuli circumferentia, ordinatim à ſectione ad diametrum ductarum quadrata ſiue rhombos eſſe ad rectangula ſiue parallelogramma ſub contiguis diametri portionibus ab vtroque tranſuerſæ termino ſumptis, vt contigua parameter ad eandem tranſuerſam diametrum: ſiue, vt coefficiens figuræ latus ad idem tranſuerſum: & conuerſim.

THEOR. XIII. PROP. XIIII.

Si conus plano per axem ſectus rurſus alio plano ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem, aut ipſi æquidiſtantem, ſit perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, cujus diametro parallela acta ſit à vertice coni ad baſim ejuſdem, vbi opus productam; quæ erit ratio quadrati ductæ parallelæ ad rectangulum ſub contiguis baſis partibus ab vtroque ejuſdem termino ſumptis, eadem erit & tranſuerſæ ſectionis diametri ad ejuſdem contiguam parametrum.

Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum B A C: qui rurſus plano ſecetur ſecundum lineam G H, quæ ſit ad BC baſim, aut ipſi æquidiſtantem,

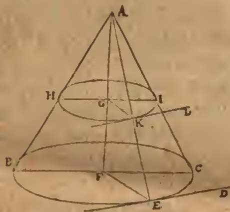


perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio hyperbola, aut ellipſis quælibet G D H, cujus vertex ſit D, & tranſuerſa diameter D F, cui à vertice trianguli A ad baſim B C, vbi opus productam, parallela acta ſit A S: ſit autem D I ſectionis parameter, ſiue iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ad F D E diametrum ordinatim applicantur: Dico vt A S quadratum ad B S C rectangulum, ita eſſe F D ad D I.

Quoniam enim B C circuli diameter eſt, & ad eam perpendicularis G H: erit G H bifariam ſecta in E: ideoque &, ex 11 hujus, recta GE ad D E diametrum ordinatim applicata: eritque rectangulo B E C quadratum E G æquale. Quoniam autem eſt F E ad E B, vt A S ad S B: & D E ad E C, vt A S ad S C: erit, componendo, F E D rectangulum ad B E C rectangulum, hoc eſt E G quadratum, vt A S quadratum ad B S C rectangulum. Sed vt F E D rectangulum ad E G quadratum, ita eſt, ex antecedente, tranſuerſa F D diameter ad D I contiguam parametrum: igitur vt A S quadratum ad B S C rectangulum, ita erit F D tranſuerſa ſectionis diameter ad D I contiguam ejuſdem parametrum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XIIII. PROP. XV.

Si circulum qui basis est coni recta contingat linea in eodem existens plano, & à vertice coni per contactum recta agatur; planum per vtramque productum superficiem coni continget: eritque contactus in eadem linea à vertice coni ducta.



Sit conus A B C, cujus vertex A, basis B C circulus, quem in E circumferentiæ basis puncto recta contingat linea D E in eodem plano existens. Iuncta autem AE, planum intelligatur per AED productum: Dico planum A E D coni A B C superficiem contingere, & contactum esse in linea A E.

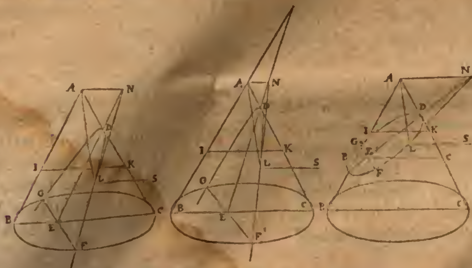
Secetur enim A B C conus plano per axem quod faciat sectionem triangulum B A C: sectaque B C bifariam in F, iungantur A F, F E: sumptoque in AE quolibet puncto K, ducatur ad A F ipsi E F æquidistans K G, & ipsi E D æquidistans ponatur K L. Seceturque rursus A B C conus plano per lineam K G quod basi æquidistet, & sectionem faciat in superficie lineam H K I: erit, ex 2 hujus, H K I sectio circuli circumferentia, ejusque diameter H I, & centrum G. Quoniam autem G K æquidistat F E, & K L ipsi E D: erit angulus G K L angulo F E D æqualis. Est autem angulus F E D rectus, quoniam F E per centrum transit, & contingit E D: rectus igitur erit & G K L angulus: ideoque & K L circumferentiam H K I circuli continget in K. Estque K L æquidistans E D: ideoque & in eodem plano quod per A E transit: circuli igitur circumferentiam H K I planum per A E D ductum continget in K. Idemque eadem ratione de quocunque alio sumpto in A E puncto demonstrabitur. Planum igitur per A E D ductum superficiem coni A B C continget: eritque contactus in linea A E. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Hinc patet, & Si circulum basi coni æquidistantem recta contingat linea in eodem existens plano; planum per coni verticem & per contingentem productum coni superficiem contingere.

THEOR. XV. PROP. XVI.

Si conus plano per axem ſectus rurſus plano quod neque baſi æquidiſtet, aut ſubcontrarie ſit poſitum, neque per verticem tranſeat, ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem, aut ipſi æquidiſtantem, ſit perpendicularis, faciatque in ſuperficie ſectionem quamcunque: & ſumpto quolibet in facta ſectione puncto, per ipſum recta agatur circuli, qui baſis eſt coni, aut ipſi æquidiſtat, circumferentiam contingens, & in eodem exiſtens plano: ſiquidem ducta contingens baſi trianguli per axem æquidiſtat; quæ à vertice trianguli ducetur contingenti æquidiſtans productæ ſectionis diametro occurret in puncto, à quo ad aſſumptum in eadem ſectione punctum ducta recta linea ipſam ſectionem in eodem præaſſumpto puncto continget. At ſi ducta contingens productæ trianguli baſi, aut ipſi æquidiſtanti, occurrat; quæ ab ejuſdem trianguli vertice ad contingentis occurſum ducetur productam ſectionis diametrum ſecabit in puncto, à quo item ad præaſſumptum in ſectione punctum ducta recta linea ipſam in eodem puncto ſectionem continget.

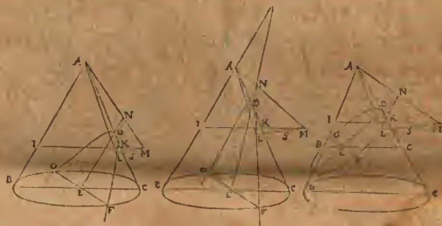


Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, qui plano per axem ſectus faciente triangulum B A C, rurſus plano neque baſi æquidiſtante, aut ſubcontrarie poſito, neque per verticem tranſeunte, ſecetur ſecundum lineam F G quæ ſit ad baſim B C, aut ipſi æquidiſtantem, perpendicularis: & ſit facta in ſuperficie coni ſectio quæcunque ſiue parabola, ſiue hyperbola, aut etiam ellipſis, F D G, cujus ſit

diameter D E: ſumptoque in ſectione puncto quolibet L, ducta ſit L S circuli I K L baſi coni æquidiſtantis circumferentiam contingens in L, in eodemque exiſtens plano. Siquidem primùm L S æquidiſtat B C: ducatur eidem æquidiſtans A N, occurrens productæ E D diametro in N: iungaturque N L. Dico rectam N L ſectionem F D G contingere in L.

Intelligatur enim A I K conus, ex 2. hujus, cujus vertex A, baſis I L K circulus, quem in L circumferentiæ baſis puncto contingat recta L S: iungaturque A L. Igitur planum per A L S productum, ex anteced. coni ſuperficiem continget: eritque contactus in linea A L. Quoniam autem æquidiſtat A N ipſi L S: erunt A N, L S in vno eodemque contingente plano. Eademque ratione & A N, B C in eodem erunt trianguli per axem plano, in quo & E D ſectionis F D G diameter producta in N, per 4, 5, & 6 hujus. Punctum igitur N erit & in producta diametro, & in plano per A L S coni ſuperficiem, ideoque & factam in ea ſectionem F D G contingente in L. Quare ducta N L in eodem erit per A L S plano ſectionem F D G contingente in L: ideoque & ipſa N L eandem F D G ſectionem in eodem L puncto continget. Quod 1. erat demonſtrandum.

Non æquidiſtet autem contingens L S ipſi B C: ſed ei, aut ipſi æquidiſtanti I K, communi ſcilicet L K circuli & trianguli per axem



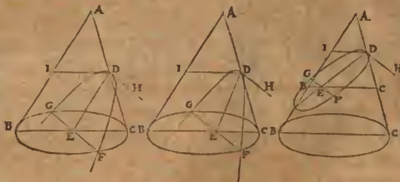
ſectioni productæ, occurrat in M: iunctaque A M productam F D G ſectionis diametrum E D ſecet in N: ducaturque N L. Dico rurſus rectam N L ſectionem F D G contingere in L.

Quoniam enim, ducta, vt priùs, A L, planum per A L M coni ſuperficiem contingit: erit recta A M & in plano contingente, & in plano trianguli per axem producto, in quo & E D ſectionis diameter producta in N. Punctum igitur N in eadem erit diametro producta, & in plano per A L M coni ſuperficiem, ideoque & factam in ea ſectionem F D G contingente in L. Quare & ducta N L erit in eodem per A L M plano ſectionem F D G contingente in L: ideoque & ipſa N L eandem F D G ſectionem in eodem L puncto continget. Quod 2. erat demonſtrandum.

THEOR. XVI. PROP. XVII.

Si à vertice cujuſcunque coni ſectionis recta ducatur ordinatim ad diametrum applicatis æquidiſtans; ipſa ſectionem in eodem verticis puncto continget.

Sit ſectio quæcunque FDG, ſiue parabola, ſiue hyperbola, aut etiam ellipſis, cujus ſit diameter DE, & vertex D: ſitque ad DE diametrum ordinatim applicatá FG, cui à vertice D æquidiſtans ducatur DH: Dico DH ſectionem FDG contingere in D.



Sit enim, vt in antecedente, FDG ſectio quæcunque in coni ABC ſuperficie facta: ſitque communis baſis coni & plani per FDG ſectio recta FG. Seceturque rurſus ABC conus plano per axem, & per lineam BC quæ ſit ad FG perpendicularis, vt ſit facta ſectio triangulum BAC: & per D ipſi BC æquidiſtans ducatur DI. Perpendicularis igitur erit DH ad DI. Quare ſecto ABC cono plano per DI æquidiſtante baſi, ſectio, per 2 hujus, circulus erit, ejuſque diameter DI, cujus circumferentiam continget in D recta HD. Planum igitur per ADH ductum, per 15 huius, ipſam coni ſuperficiem continget: eritque contactus in linea AD. Continget igitur & idem per ADH planum ſectionem FDG in eodem communi D puncto. Quare & in eodem D puncto eandem FDG ſectionem continget recta HD. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Hinc fit manifeſtum Cujuſcunque ſectionis parametrum ſectionem in vertice contingere: quoniam & à vertice ducitur ordinatim applicatis æquidiſtans ex definit.

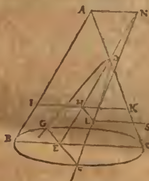
COROLL. II.

Atque hinc etiam fit manifeſtum Rectam quæ coni ſectionem in vertice contingit ordinatim ad diametrum applicatis eſſe æquidiſtantem.

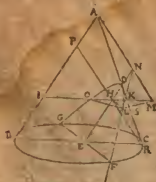
THEOR. XVII. PROP. XVIII.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata; erunt interceptę vtrinque à vertice diametri portiones æquales.

Sit parabola F D G, cuius diameter D E, vertex D. Sectionem autem contingat in L, recta L N diametro D E occurrens in N: & ad diametrum ordinatim sit applicata L H. Dico H D esse æqualem D N.



Sit enim FEG recta ęquidistans LH. Et ipsa FDG parabola coni ABC sit sectio, cuius basis & plani secantis communis sectio sit recta FG. Sectusque intelligatur ABC conus plano per axem quod faciat triangulum B A C, & communem cum base sectionem rectam B C ad F G perpendicularem: ducaturq; per H recta I H K æquidistans BC: & per rectas I K, H L planum ductum conum secet; erit vtique sectio basi coni æquidistans, ideoque circulus, per 2 huius, cuius diameter erit I K perpendicularis ad H L. Sit autem primùm punctum H eiusdem circuli centrum: ideoque & I H æqualis HK. Ducta igitur LS æquidistans IK, propter angulum IHL rectum, eiusdem I L K circuli circumferentiam continget in L: & ducta per A ipsi L S æquidistans recta A N productæ E D sectionis diametro occurret in N, per 16 huius: eritque, propter sectionem, recta H N æquidistans AI: ideoque & A N æqualis I H, hoc est H K: quare & H D erit æqualis D N. Quod 1. erat demonstrandum.



Non sit autem iam punctum H circuli I L K centrum: sed maior minorve sit I H quam H K. Secta igitur bifariam I K in O, erit O centrum circuli I L K: & ducta L S perpendicularis ad O L eius circumferentiam continget in L: &, propter angulum HOL acutum, diametro I K productæ occurret. Occurrat in M. Iuncta igitur AM productam sectionis diametrum E D secabit in eodem N puncto, per 16 huius. Ducatur insuper ipsi A M æquidistans per H recta P H R occurrens A B in P, & A C, si opus est productæ, in R. Quoniam igitur perpendicularis est O L ad L M, & L H ad I K: erit rectangulum M H O æquale rectangulo

IHK. Quare erit MH ad HI, vt HK ad HO: &, componendo, MI ad HI, vt KO ad HO. Sed permutando erit MH ad KH, vt HI ad HO: &, diuidendo, MK ad KH, vt IO, hoc eſt KO, ad HO: igitur vt MI ad HI, hoc eſt vt AM ad PH, ita erit MK ad KH, hoc eſt AM ad HR. Æqualis igitur erit HR ipſi PH. Vt autem RH ad HP, ita eſt RD ad DA: & ita HD ad DN: æqualis igitur erit & HD ipſi DN. Quod 2 erat demonſtrandum.

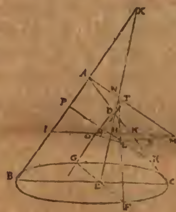
THEOR. XVIII. PROP. XIX.

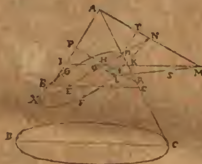
Si hyperbolem, aut ellipſim, vt & circuli circumferentiam recta contingat linea productæ diametro occurrens, & à contactu ad diametrum recta ſit ordinatim applicata; erunt diametri portiones ab vtroque tranſuerſæ termino ad contingentem ſumptæ inuicem, vt eiuſdem diametri portiones vtroque eodem reſpondente termino & ordinatim ducta interceptæ inuicem.

Sit hyperbola, vel ellipſis FDG, cuius vertex D tranſuerſa diameter XD. Contingat autem ſectionem in L recta LN cum diametro conueniens in N: & ad diametrum XD, vbi opus productam, ordinatim ſit applicata LH: Dico vt XH ad HD, ita eſſe XN ad ND. Sit enim FEG recta æquidiſtans LH. Et ipſa FDG hyperbola, aut ellipſis, coni ABC ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta FG. Sectuſque intelligatur ABC conus plano per axem quod faciat triangulum BAC, & communem cum baſe coni ſectionem rectam BC ad FG perpendicularem. Ducaturque per H recta IHK æquidiſtans BC: & per rectas IK, HL planum productum conum ſecet; erit vtique ſectio ILK baſi coni æquidiſtans, ideoque circulus, per 2 huius, cuius diameter erit IK perpendicularis ad HL. Sit autem primùm punctum H eiuſdem ILK circuli centrum, ideoque & IH æqualis HK.

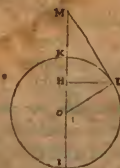
Ducta

Ducta igitur LS æquidistans IK, propter angulum IHL rectum, circuli ILK circumferentiam continget in L. Quare, per 16 huius, ducta per A ipsi LS æquidistans recta AN productæ, vbi opus, sectionis diametro XDE occurret in N. Ducatur per D recta q D T æquidistans A B, occurrensque rectæ I K in q, & rectæ A N, vbi opus productæ, in T. Erit igitur vt XH ad HD, ita HI, hoc est K H, ad Hq: & ita A N ad N T. Sed vt AN ad NT, ita est XN ad ND: igitur vt XH ad HD, ita erit X N ad N D. Quod 1 erat demonstrandum.





Non sit autem iam punctum H circuli I L K centrum: sitque maior, minorve, I H quam H K. Secta igitur I K bifariam in O, erit O centrum circuli I L K: & ducta L S perpendicularis ad O L eiusdem circumferentiam continget in L: &, propter angulum H O L acutum, productæ I K diametro occurret. Occurrat in M. Iuncta igitur A M productam, vbi opus, sectionis diametrum XDE secabit in eodem N puncto, per 16 huius. Quare si, ducta, vt in antecedente factum est, per H ipsi AM æquidistante recta P H R: & ostensa, vt ibidem, recta R H æquali H P: ducatur, vt prius, per D recta q D T æquidistans A B, occurrens P R in q, & ipsi A M in T; erit vt X H ad H D, ita H P, hoc est R H, ad H q: & ita A N ad N T: Ideoque & ita X N ad N D. Quod 2 erat demonstrandum.



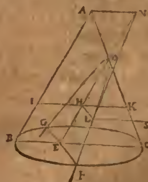
Et in circuli quidem circumferentia I L K in plano exposita, quam contingit in L recta L M cum producta I K diametro conueniens in M, & à cuius puncto L ad I K diametrum ordinatim est applicata L H: illud idem, quod propositum est, nempe ita esse I M ad M K, vt I H ad H K: sic demonstrabitur.

Erecta perpendiculari L O, vt sit O centrum circuli; erit quadrato H L æquale vnumquodque I H K, O H M rectangulum. Quare vt M H ad H I, ita erit K H ad H O: &, componendo, vt M I ad H I, ita erit K O ad HO. Sed, permutando, vt MH ad KH, ita etiam erit HI ad HO: &, diuidendo, vt MK ad KH, ita K O ad H O: Igitur I M ad H I erit vt M K ad K H: &, permutando, erit I M ad M K, veluti I H ad H K. Quare omnino constat propositum. Quod erat demonstrandum.

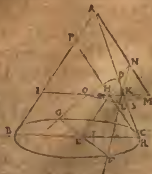
H

THEOR. XIX. PROP. XX.

Si in parabola à ſumpto quolibet in ſectione puncto recta ad diametrum ordinatim ſit applicata: & interceptæ diametri portioni à vertice æqualis in directum apponatur; recta quæ à facto in producta diametro termino ad aſſumptum in ſectione punctum ducetur, ſectionem in eodem aſſumpto puncto continget.



Sit parabola F D G, cuius vertex D, diameter D E. A ſumpto autem in ſectione puncto quolibet L, ordinatim ad D E diametrum ducta ſit L H: & producta H D in N, vt ſit D N æqualis H D, iungatur N L: Dico rectam N L parabolam F D G contingere in L. Sit enim, vt in 18 huius, parabola F D G coni A B C ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta F E G æquidiſtans L H. Sectuſque primùm A B C conus plano per axem quod faciat triangulum B A C, cuius baſis ſit ad F G perpendicularis, rurſus per H L ſecetur plano baſi æquidiſtante quod in ſuperficie faciat, per 2 huius, ſectionem I L K circuli circumferentiam, cuius ſit diameter I H K æquidiſtans B C. Iuncta autem A N primùm æquidiſtet I K: eidemque æquidiſtans ducatur L S. Quoniam igitur vt N D ad D H, ita eſt A N ad K H: erit A N æqualis H K. Sed, propter ſectionem, recta A N æquatur I H: igitur & I H æqualis erit H K: & punctum H centrum erit circuli I L K. Eſt autem & L H perpendicularis ad I K, & L S ipſi æquidiſtans: angulus igitur H L S eſt rectus. Quare & circuli I L K circumferentiam contingit in L recta L S in eodem exiſtens plano: & ei æquidiſtat A N productæ E D ſectionis diametro occurrens in N: ducta igitur N L, per 16 huius, ſectionem F D G continget in L. Quod 1. erat demonſtrandum.



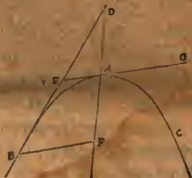
Non æquidiſtet autem A N ipſi I K: ſed producta occurrat productæ I K in M: (occurret enim quoniam in eodem ſunt trianguli B A C plano.) eique æquidiſtans per H ducatur P H R: iungaturque L M. Cum ſit igitur vt N D ad D H, ita A D ad D R: & ita P H ad H R: erit A D æqualis D R & P H æqualis H R. Eſt autem D K minor quam D R: & vt A D ad D K, ita eſt I H ad H K: minor igitur erit H K quam I H. Sit ergo I O æqualis

O K: ideoque & O centrum circuli I L K: iungaturque O L. Quoniam igitur vt A M ad R H, siue H P, ita est M K ad K H: & ita M I ad H I: erit, permutando, vt M K ad M I, ita K H ad H I: &, componendo, vt vtraque M K, M I ad M I, ita erit I K ad H I: & antecedentium dimidia, vt M O ad M I ita erit K O ad H I. Quare, conuertendo, & per conuersionem rationis, vt M I ad K O, ita erit H I ad H O: &, permutando, vt M I ad H I, ita erit K O ad H O: diuidendoque, vt M H ad H I, ita erit K H ad H O. Rectangulum igitur M H O rectangulo I H K, hoc est, propter I H L angulum rectum, quadrato H L erit æquale: ideoque & O L M angulus erit rectus: & propterea recta L M in eodem circuli I L K existens plano eius circumferentiam continget in L. Ducta autem A M productam E D diametrum secat in N: quare, ex 18 huius, ducta N L sectionem F D G continget in L. Quod 2. erat demonstrandum.

THEOR. XX. PROP. XXI.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens; quæ à vertice ad ipsam recta ducetur linea ordinatim applicatis æquidistans poterit quadrato, vel rhombo, spatium æquale quadranti rectanguli, vel parallelogrammi, sub producta diametro & contigua parametro.

Sit parabola B A C, cujus diameter A F, & vertex A. Contingatque sectionem in B recta B D diametro F A productæ occurrens in D. A vertice autem ducatur A E ordinatim ad A F diametrum applicatis æquidistans, occurrensque contingenti B D in E. Et sit sectionis parameter A G. Dico rectam A E posse quadrato, vel rhombo, quartam partem rectanguli, vel parallelogrammi, sub rectis D A, A G.



Sit enim à puncto B ad A F diametrum ducta B F æquidistans A E. Ordinatim igitur erit applicata B F: eritque, ex 10 hujus, quadrato, vel rhombo, ex B F æquale rectangulum, vel parallelogrammum, F A G. Sed, propter contingentem B D, recta A D rectæ A F erit æqualis, ex 18 hujus: igitur & rectangulum B A G rectangulo F A G erit æquale, siue parallelogrammum parallelogrammo: rectaque F B erit rectæ A E dupla: & propterea quadratum F B quadrati A E quadruplum: & rhombus rhombi quadruplus. Rectangulum igitur, vel parallelogrammum, D A G quadrati, vel rhombi, ex A E erit quadruplum: ideoque & recta A E poterit quadrato, vel rhombo

quartam partem rectanguli, vel parallelogrammi, sub rectis D A, A G. Quod erat demonstrandum.

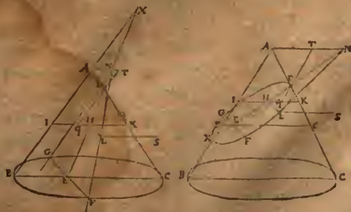
CONSECTARIVM GENERALE.

Itaque In parabola, siue dato in sectione puncto quolibet indidem recta ad diametrum ordinatim sit applicata, & sumantur hinc inde à vertice diametri portiones æquales: siue dato in producta diametro quolibet puncto, sumatur aliud æqualiter à vertice distans, à quo ad sectionem educatur recta ordinatim applicata; quæ data, aut acquisita, huiusmodi in producta diametro & in sectione puncta recta iunget linea, ex anteced. sectionem continget.

Atque etiam Recta quæ à dato in producta diametro puncto ducetur ad terminum rectæ à vertice eductę ordinatim applicatis æquidistantis, cuiusque quadratum æquale sit quartæ parti rectanguli sub eadem producta diametro & contigua parametro, tandem producta sectionem, ex hac, continget.

Theor. XXI. Prop. XXII.

Si in hyperbola, aut ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, à sumpto quolibet in sectione puncto recta ad diametrum ordinatim sit applicata: &, quæ fuerit diametri portionum applicata & vtroque transuersæ termino interceptarum ratio inuicem, eadem sit eiusdem diametri partium ab eodem vtroque respondente termino ad punctum in ea signatum sumptarum inuicem; recta linea quæ à signato in diametro puncto ad assumptum in sectione punctum ducetur, sectionem in eodem pręassumpto puncto continget.



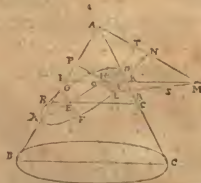
Sit hyperbola, vel ellipsis F D G, cuius vertex D, transuersa diameter X D. A sumpto autem quolibet in sectione puncto L ad X D diametrum, vbi opus productam, ordinatim sit applicata L H: & vt X H ad H D, ita sit X N ad N D: ducaturque

turque N L. Dico rectam N L ſectionem F D G contingere in L.

Sit enim, vt in 19 huius, F D G hyperbola, vel ellipſis, coni A B C ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta F E G æquidiſtans L H. Sectuſque iam A B C conus plano per axem quod faciat triangulum B A C, cuius baſis B C ſit ad F G perpendicularis, rurſus ſecetur plano per H L baſi coni æquidiſtante quod faciat, per 2 huius, in ſuperficie ſectionem I L K circuli circumferentiam, cuius ſit diameter I H K æquidiſtans B C. Ducta autem A N primùm æquidiſtet I K: eidemque æquidiſtans ducatur L S, & per D ipſi A B æquidiſtans q D T. Erit igitur vt X H ad H D, hoc eſt H I ad H q, ita X N ad N D, hoc eſt A N ad N T, ſiue K H ad H q: quare vt H I ad H q, ita erit K H ad H q. Æqualis igitur erit K H ipſi H I: eritque H centrum circuli I L K. Ideoque &, propter angulum I H L rectum, ducta L S æquidiſtans diametro I K, circuli I L K circumferentiam continget in L: &, propter ipſi æquidiſtantem A N productæ, vbi opus, diametro X D occurrentem in N, ducta N L, per 16 huius, ſectionem F D G continget in L. Quod 1. erat demonſtrandum.

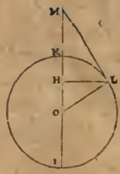
Non æquidiſtet autem A N diametro I K, ſed eidem productæ occurrat producta in M: (in eodem enim ſunt trianguli B A C plano:) eique æquidiſtans per H ducatur P H R, & per D ipſi A B æquidiſtans q D T coincidens P R in q, & ipſi A M in T: iungaturque L M. Oſtendetur igitur 1, vt in antecedente factum eſt, recta I H maior minorve quam H K: ideoque & ſecta I K bifariam in O, erit O centrum circuli I L K. Deinde, vt in antecedente, & in 19 huius, oſtendetur recta P H æqualis H R: &, propter æquidiſtantes A M, P R, itemque L H, F G, & I H, B C, ideoque & angulum I H L rectum, oſtendetur, vt in eadem 19 huius, ducta O L ad L M perpendicularis: & propterea L M circuli I L K circumferentiam contingere in L. Sed ducta A M ſectionis F D G diametrum X D, vbi opus, productam, ſecat in N: ducta igitur N L eandem F D G ſectionem, per 16 huius, continget in L. Quod 2 erat demonſtrandum.





Et in circuli circumferentia I L K in plano expoſita, illud idem quod propoſitum eſt, nempe, ſi vt I H ad H K, ita ſit I M ad M K: & educta ſit perpendicularis H L; rectam M L ductam circuli circumferentiam contingere in L, ſic conſtabit. Quoniam enim vt I H

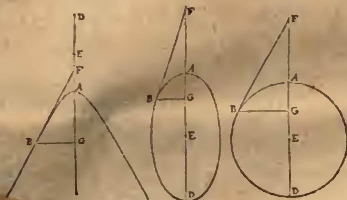
ad H K, ita eſt I M ad M K: &, componendo, vt I K ad K H, ita vtraque I M, M K ad M K; erit, ſumptis antecedentium dimidiis, vt O K ad K H, ita O M ad M K. Sed, per conuerſionem rationis, vt O K ad H O, ita erit O M ad K O: igitur, ex æquali, & permutando, vt H K ad M K, ita erit H O ad K O: &, componendo, vt H K ad H M, ita erit H O ad I H. Quare rectangulum M H O æquale erit rectangulo I H K, hoc eſt quadrato H L. Ducta igitur O L perpendicularis erit ad L M. Ideoque & L M circuli I L K circumferentiam continget in L. Quare omninò conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XXII. PROP. XXIII.

Si hyperbolem, aut ellipſim, vt & circuli circumferentiam recta contingat linea cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinatim ſit applicata; erit quadrato dimidiæ tranſuerſæ diametri æquale rectangulum ſub interceptis ordinatim ducta & contingente diametri portionibus à centro ſumptis.

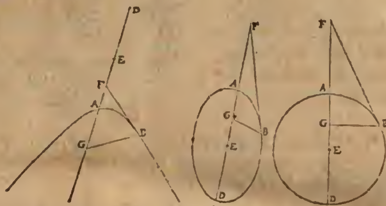
Sit hyperbola, vel ellipſis, vt etiam circuli circumferentia, A B, cujus vertex A, tranſuerſa diameter A D, & centrum E. Sectionem autem contingat in B recta B F cum diametro D A, vbi opus producta, conueniens in F: & ad diametrum ſit ordinatim applicata B G: Dico quadrato A E æquale eſſe rectangulum G E F.



Quoniam enim, ex 19 hujus, vt D G ad G A, ita eſt D F ad F A; erit, in hyperbola, vt vtraque D G, G A ad G A, ita D A ad F A: &, antecedentium dimidia, vt E G ad G A, ita E A ad F A: &, per conuerſionem rationis, vt E G ad E A, ita E A ad E F. In ellipſi autem, vt & in circuli circumferentia, erit, componendo, vt D A ad G A, ita vtraque D F, F A ad F A: &, antecedentium dimidia, vt A E ad A G, ita F E ad F A: &, per conuerſionem rationis, vt A E ad G E, ita F E ad A E. Quare vtrinque quadrato A E erit æquale G E F rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIII. PROP. XXIIII.

Iisdem positis; erit, in dictis sectionibus, rectangulo sub diametri partibus vtroque transuersæ termino & contingente interceptis æquale rectangulum sub ejusdem diametri partibus contingenti contiguis à centro & ordinatim applicata sumptis.

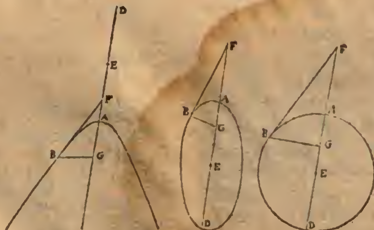


Sit eandem quæ in antecedente: Dico rectangulum GFE rectangulo DFA esse æquale.

Quoniam enim ostensum est vt GE ad EA, ita esse AE ad EF: erit, componendo, vt GD ad DE, ita DF ad EF: &, permutando, vt GD ad DF, ita DE ad EF: &, diuidendo, vt GF ad DF, ita AF ad EF. Rectangulo igitur DFA æquale erit GFE rectangulum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXIIII. PROP. XXV.

Iisdem adhuc positis; erit, in dictis sectionibus, rectangulo sub diametri partibus vtroque transuersæ termino & ordinatim applicata interceptis æquale rectangulum sub ejusdem diametri partibus applicatæ contiguis à centro & contingente sumptis.



Sint adhuc eadem quæ in 23 hujus: Dico rectangulo DGA æquale esse rectangulum EGF.

Quoniam enim, ex eadem 23 hujus, vt GE ad EA, ita est EA ad EF: erit, per conuersionem rationis, vt GE ad GA, ita EA ad AF: &,

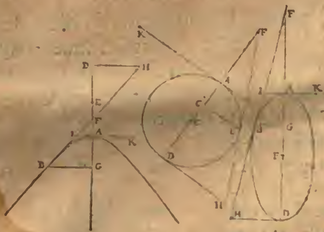
permutando, vt GE ad EA, ita GA ad AF: &, componendo, vt GE ad GD, ita GA ad GF. Quare rectangulo DGA æquale erit rectangulum EGF. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Hinc igitur, & ex coroll. ad 13 *hujus patet* In hyperbola, & ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, omne rectangulum sub diametri partibus contingenti contiguis à centro & ordinatim à contactus puncto applicata sumptis, vt hîc EGF, esse ad quadratum ordinatim applicatæ, vt BG, veluti transuersa sectionis diameter ad contiguam parametrum: siue, vt transuersum figuræ sectionis latus ad coefficiens.

THEOR. XXV. PROP. XXVI.

Si hyperbolem, aut ellipsim, veluti & circuli circumferentiam, recta contingat linea: & ab vtroque transuersæ diametri termino rectæ ordinatim applicatis æquidistantes eidem occurrant; quæ ex ipsis à contingente abscindentur portiones, quadranti figuræ ad diametrum factæ æquale continebunt rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum.



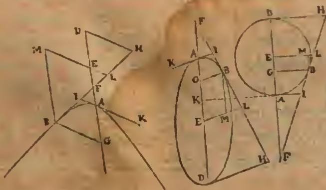
Sit hyperbola, aut ellipsis, vt etiam circuli circumferentia, AB, cujus vertex A, diameter transuersa DA, & centrum E: contingat autem sectionem in B recta BF, cui productæ occurrant in H, & I rectæ DH, AI ordinatim applicatis æquidistantes: & sit sectionis parameter, siue coefficiens figuræ latus recta AK: Dico quadranti figuræ DAK æquale esse rectangulum, aut parallelogrammum, figuræ æquiangulum, rectis HD, AI constans.

Sit enim ordinatim applicata BG: & in quo contingens BF diametro occurrit sit punctum F. Quoniam igitur contingit BF diametro occurrens in F, & ordinatim est applicata BG; erit, ex 24 hujus, rectangulum GFE rectangulo DFA æquale. Quare erit vt GF quadratum ad GFE rectangulum, hoc est vt GF ad EF, ita GF quadratum

quadratum ad D F A rectangulum. Sed ratio G F quadrati ad D F A rectangulum composita est ex ratione G F ad D F, hoc est B G ad H D, & ex ratione G F ad F A, hoc est B G ad A I: quare, componendo, vt G F quadratum ad D F A rectangulum, hoc est vt G F ad F E, ita erit B G quadratum ad rectangulum rectis H D, A I contentum. Vt autem G F ad F E, ita est E G F rectangulum ad G E F rectangulum, hoc est, ex 22 hujus, ad A E quadratum: igitur vt E G F rectangulum ad A E quadratum, ita erit B G quadratum ad rectangulum H D, A I: &, permutando, vt E G F rectangulum ad B G quadratum, hoc est, ex antecedente, vt D A ad A K, ita erit A E quadratum ad rectangulum H D, A I. Sed vt D A ad A K, ita est D A quadratum ad D A K rectangulum: & ita A E quadratum ad quadrantem rectanguli D A K: igitur vt A E quadratum, vel rhombus, ad quadrantem rectanguli, vel parallelogrammi, D A K, ita erit A E quadratum, vel rhombus, ad rectangulum, siue parallelogrammum figuræ D A K æquiangulum, rectis H D, A I contentum. Quadranti igitur figuræ, hoc est rectanguli, siue parallelogrammi, D A K æquale est rectangulum, vel parallelogrammum, ipsi D A K æquiangulum, rectis H D, A I contentum. Quod erat demonstrandum.

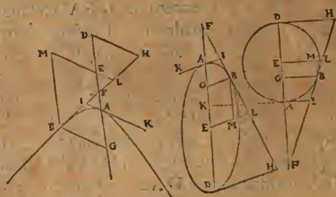
THEOR. XXVI. PROP. XXVII.

Si hyperbolem, aut ellipsim, veluti & circuli circumferentiam, recta contingat linea occurrens ei quæ per centrum sectionis ordinatim applicatis ducetur æquidistans: & à tactu recta diametro parallela eidem per centrum ductæ occurrat; erit quadranti figuræ ad diametrum factæ æquale rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum, sub interceptis per centrum ductæ partibus à diametro factis contentum.



Sit hyperbola, aut ellipsis, vt etiam circuli circumferentia, B A, cujus vertex A, transuersa diameter A D, & centrum E. Contingatque sectionem in B recta B F: & per centrum E ducatur M E L ordinatim ad D A diametrum applicatis æquidistans, occurrensque contingenti B F in L: & à contactu B ipsi A D diametro æquidistans ducatur B M, occurrens M L in M: sitque A K

ſectionis parameter, ſiue coefficiens figuræ latus. Dico quadranti figuræ D A K æquale eſſe M E L rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum.



Sit enim ordinatim applicata B G. Et à punctis A & D ipſi B G æquidiſtantes ducantur D H, A I contingenti occurrentes in H, & I. Quoniam igitur contingit B F diametro occurrens in F; erit, ex 22 hujus, rectangulo G F E æquale rectangulum D F A: quare vt G F ad D F, hoc eſt vt B G ad H D, ita erit F A ad F E, hoc eſt ita A I ad E L. Rectangulum igitur rectis B G, E L contentum, hoc eſt rectangulum M E L rectangulo ſub rectis H D, A I, ſiue parallelogrammum M E L parallelogrammo ipſi æquiangulo H D, A I, hoc eſt, ex antecedente, quadranti figuræ D A K erit æquale. Quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM GENERALE.

Conſtat igitur ex ſupra oſtenſis, Si in hyperbola, aut ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, B A, cujus ſit vertex A, diameter tranſuerſa A D, & centrum E, ſumpto quolibet punctorum B, aut F, aut G, quadrato A E æquale ſit rectangulum G E F, & ordinatim applicata B G, vt in 22 hujus; aut rectangulo D F A æquale ſit rectangulum E F G; vel rectangulo D G A æquale rectangulum E G F, ordinatimque ducta B G, vt in 23 & 24; aut vt tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum, ita ſit rectangulum E G F ad B G ordinatim applicatæ quadratum, vt in coroll. ad 24; aut quadranti figuræ D A K ad D A tranſuerſam diametrum factæ æquale ſit alterutrum H D, A I, aut M E L rectangulum, vel parallelogrammum figuræ D A K æquiangulum, vt hic & in antecedente; in omnibus his caſibus rectam H B ſectionem B A contingere in B. Illud enim conuerſo demonſtrationis modo facilè oſtendetur.

MONITVM.

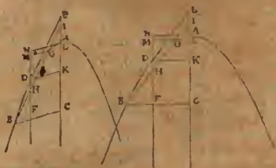
Quæ promiſcuè hactenus circa coni ſectionum generationes, & propriam cujuſque naturam, de quibuſlibet diametris, &

rectis à sectione ad easdem ordinatim applicatis, aut aliter ductis, generaliter, & in quibuscunque conis (singularibus tamen, vt de oppositis sectionibus adhuc taceamus) sumus speculati: eadem speciatim in cono scaleno, pro illis diametris duntaxat ad quas à sectione ordinatæ in angulo obliquo applicantur, etiam speculari licebit. Vt intelligamus in omnibus sectionibus eadem quibuslibet assumptis diametris conuenire, & accidere, quæ axi: si modo ab vmbilicorum inquisitione abstineamus, qui in solo axe latent. Quandoquidem si conus quilibet scalenus plano iam per axem sectus non ad rectos basi angulos, rursus secetur secundum lineam quæ sit ad basim trianguli per axem perpendicularis, alio plano formante quæsitam quamcunque in superficie coni sectionem; erit sectionis diameter communi plani secantis & basis coni sectioni inclinata, ideoque & ad eam à sectione ordinatim ductæ in angulo obliquo applicabuntur. Attamen & eadem erit eiusdem sectionis, siue in coni scaleni superficie, siue in plano ipsam formante considerata, diameter ex generatione, & principalis, ac veluti alter axis: (quidni enim, quando & conis scalenis sui sunt axes, quanquam obliqui?) Et de ejusmodi diametro eadem omnia hactenus præmissa, vt & ea quæ in sequentibus proponentur, æquè adæquatè prædicari poterunt, ac de axe ejusdem sectionis siue in plano, siue in secti ab eo recti vel scaleni coni superficie contemplatæ. Neque enim vlla cujuslibet coni sectionis in plano expositæ vtcunque assumpta diameter proponetur, quæ non sit alicuius coni scaleni sectionis ejusdem diameter ex generatione, & principalis. Quare vnum hoc præmissis addendum superest, vt instituendæ coni sectionum in plano speculationi satisfaciant: nempè in parabola diametros omnes principali diametro, siue ex generatione, ideoque & inuicem esse æquidistantes. At in hyperbola, & ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, diametros omnes inclinatas esse inuicem, & coeuntes, perque commune cuiusque sectionis centrum transire. Ideoque in parabola quæcunque diametro æquidistans recta proponetur, & ipsa quoque ejusdem parabolæ diameter erit. At in hyperbola, & ellipsi, veluti in circuli circumferentia, quæcunque recta proponetur per sectionis centrum ducta, aut eidem occurrens, & intra sectionem perducta, ejusdem quoque sectionis erit diameter. Quod proximè sequentibus satis fiet manifestum.

THEOR. XXVII. PROP. XXVIII.

Si parabolam recta contingat linea; quæ per tactum diametro, aut axi, æquidistans intra sectionem ducetur, rectas omnes in sectione ductas contingenti æquidistantes bifariam secabit.

Sit cuiuscunque coni sectio parabola B A, cuius principalis, siue ex generatione diameter, vel etiam axis, sit A C. Sectionemque contingat in D recta D E. Ducta autem per D recta D F ipsi A C diametro parallela, à quolibet sectionis puncto B ducatur in ipsa recta B G æquidistans D E, quæ à recta D F secetur in H: Dico rectam B G à recta D F bifariam secari in H.



Producta enim D E occurrat diametro C A productæ in E: eidemque producta B G occurrat in I: ordinatimque sint applicatæ B F C, D K, L G M, A N. Quoniam igitur D E sectionem contingit diametro occurrens in E, & ordinatim applicata est D K; erit, ex 18 hujus, A E æqualis A K. Parallelogrammum igitur K N triangulo D K E erit æquale. Sed propter similitudinem triangulorum D K E, G L I, vt D K quadratum ad G L quadratum, ita erit triangulum D K E ad triangulum G L I: & ita, ex 7 huius, A K ad A L, hoc est parallelogrammum K N ad parallelogrammum L N: &, permutando, vt triangulum D K E ad parallelogrammum K N, ita triangulum G L I ad parallelogrammum L N. Parallelogrammum igitur L N triangulo G L I etiam æquale erit. Eademque ratione & parallelogrammum CN triangulo B C I ostendetur æquale. Ablatis igitur vtrinque æqualibus, parallelogrammo scilicet L N, & triangulo G L I; erit reliquum B G L C quadrilaterum reliquo C M parallelogrammo æquale: & ablato communi quinquelatero F H G L C, erit reliquum B H F triangulum reliquo G H M triangulo æquale, & simile. Recta igitur B H rectæ H G erit æqualis. Et sunt puncta B & G in sectione; ducta igitur D F diametro A C æquidistans rectam B G in sectione ductam bifariam secabit in H. Sed & similiter quamcunque aliam contingenti D E æquidistantem bifariam secare ostendetur. Constat igitur propositum. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Hinc, & ex definit. patet, Rectam D F, & quamcunque aliam

aliam principali diametro AC æquidiſtantem, etiam ſectionis ſiue parabolæ BA eſſe diametrum. Ideoque, & quæcunque ex præmiſſis, & ſequentibus, principali diametro conuenientia erunt, eadem & eidem DE diametro, & eiuſmodi omnibus alijs aptè conuenire.

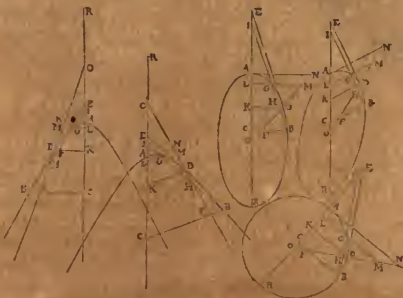
THEOR. XXVIII. PROP. XXIX.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vt & circuli circumferentiam recta contingat linea; quæ per tactum & centrum recta intra ſectionem ducetur, rectas omnes in eadem ſectione ductas contingenti ęquidiſtantes bifariam ſecabit.

Sit cuiuſcunque coni ſectio hyperbola, vel ellipſis, vt etiam circuli circumferentia, BA, cuius principalis, ſiue ex generatione diameter, vel etiam axis, ſit AC, & centrum O. Sectionemque in D contingat recta DE, cui æquidiſtans à quolibet alio ſectionis puncto B recta in ipſa ducatur BG. Per centrum autem O, & contactum D, ducta OD & producta, vbi opus, rectam BG ſecet in H: Dico BG bifariam ſecari in H.

Productæ enim DE, BG cum AC diametro conueniant in E, & I: ordinatimque ad OC diametrum ſint applicatæ BFC, DK, LGM, AN. Quoniam igitur DE ſectionem contingit productæ diametro occurrens in E: & ordinatim eſt applicata DK; erit, ex 23 huius, quadrato OA æquale rectangulum KOE. Quare vt KO quadratum ad OA quadratum, hoc eſt vt KOD triangulum ad AON triangulum, ita erit KO ad OE: hoc eſt ita KOD triangulum ad OED triangulum. Triangulum igitur OED triangulo AON erit æquale: ideoque & reliquum NK quadrilaterum reliquo DEK triangulo æquale. Quoniam autem vt KO quadratum ad OA quadratum, ita eſt KOD triangulum ad AON triangulum, & permutatim; in hyperbola quidem, vt totum OK

quadratum ad totum KOD triangulum, ita erit reliquum RKA rectangulum ad reliquum NK quadrilaterum. Similiterque ostendetur, vt totum OL vel OC quadratum ad totum OLM, vel OCF, triangulum, ita esse reliquum RLA, vel RCA, rectangulum ad reliquum NL, vel NC, quadrilaterum. At in ellipsi, vt & in



circuli circumferentia, vt ablatum OK quadratum ad ablatum KOD triangulum, ita erit reliquum RKA rectangulum ad reliquum NK quadrilaterum. Similiterque vt ablatum OL, vel OC, quadratum ad ablatum OLM, vel OCF, triangulum, ita erit reliquum RLA, vel RCA rectangulum ad reliquum NL, vel NC, quadrilaterum. Cum igitur vtrinque sit vt OK quadratum ad KOD triangulum, ita RKA rectangulum ad NK quadrilaterum: & ita RLA, vel RCA rectangulum ad NL, vel NC, quadrilaterum; erit, permutando, RKA rectangulum ad RLA, vel RCA rectangulum, vt quadrilaterum NK ad quadrilaterum NL, vel NC. Vt autem rectangulum RKA ad rectangulum RLA, vel RCA, ita, ex 8 huius, est quadratum DK ad quadratum GL, vel BC: hoc est ita DEK triangulum ad triangulum GLI, vel BCI: vt igitur quadrilaterum NK ad quadrilaterum NL, vel NC, ita erit triangulum DEK ad triangulum GLI, vel BCI: & permutatim. Sed triangulo DEK ostensum est æquale NK quadrilaterum: igitur & triangulo GLI æquale erit quadrilaterum NL: & triangulo BIC æquale quadrilaterum NC. Ablatis igitur æqualibus, triangulo scilicet GIL, & quadrilatero NL, erit reliquum LB quadrilaterum reliquo MC quadrilatero æquale. Communi igitur ablato FHGLC quinquelatero, erit reliquum MHG triangulum reliquo BHF triangulo æquale: & propter æquidistantes MG, BF etiam simile. Recta igitur BH rectæ HG erit æqualis. Et sunt puncta B, G in sectione: igitur per centrum O, & contactum D, ducta ODH rectam BG in sectione ductam bifariam secabit in H. Quod erat demonstrandum.

Quoniam autem sæpiùs euenire potest, vt in ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, à sumpto in sectione puncto B ad AC

diametrum ordinatim ducta BC infra centrum O ad partes R cadat, occurrens DO productæ in F: ſumpta hoc caſu, in OD, recta OP æquali OF, ductaque PS æquidiſtante DK, vt ſit OPS triangulum triangulo OFC ſimile & æquale; oſtendetur, vt priùs, triangulum BCI quadrilatero NS eſſe æquale. Additiſque æqualibus OPS, OFC triangulis erit quadrilaterum BIOF triangulo NAO, hoc eſt quadrilatero MGIO, æquale. Rurſuſque ablato communi HIO triangulo, fiet triangulum MHG triangulo BHF, vt priùs, æquale & ſimile: ideoque & recta BH rectæ HG æqualis. Sed & eadem ratione, à quocunque alio ſumpto ſectionis puncto ducta in ipſa recta contingenti DE æquidiſtans à recta OD per centrum & contactum ducta bifariam ſecari oſtendetur: conſtat igitur omninò propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

CoROLL.

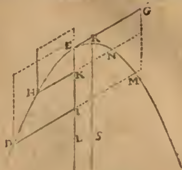
Hinc igitur etiam, & ex definit. patet, Rectam OD, & quamcunque aliam per centrum ſectionis O ductam, eiuſdem ſectionis eſſe diametrum: ideoque, & in dictis ſectionibus quæcunque, ſiue ex præmiſſis, ſiue ex ſequentibus, principali diametro, ſiue ex generatione, conuenient, eadem & ipſi OD diametro, & eiuſmodi omnibus alijs per centrum & quodlibet ſectionis punctum ductis, aptè conuenire.

THEOR. XXIX. PROP. XXX.

Si in parabola binæ quælibet rectæ à ſectione ad aſſumptam quamcunque rectam diametro, aut axi, parallelam ducantur æquidiſtantes ei quæ ſectionem in eiuſdem aſſumptæ termino contingit; erunt æquidiſtantium quadrata inuicem, vt contiguæ eiuſdem aſſumptæ portiones à contactu inuicem.

Sit cuiuſcunque coni ſectio parabola DER, cuius diameter, vel axis, RS, cui æquidiſtans ſumatur recta quæcunque EL. Sectionem autem contingat in E recta GE. Sumptiſque in ſectione binis quibuſlibet punctis D, & H, ducantur

E ducta est diametro R S æquidistans E L: atque à sectione ad E L ducta est contingenti E G æquidistans D I. Vt autem D I quadratum ad E I quadratum, ita sit recta E G ad rectam E I: & à quolibet alio in sectione puncto H ducta sit ipsi E G æquidistans H K. Dico parallelogrammum G E K rhombo ipsi æquiangulo ex H K esse æquale.



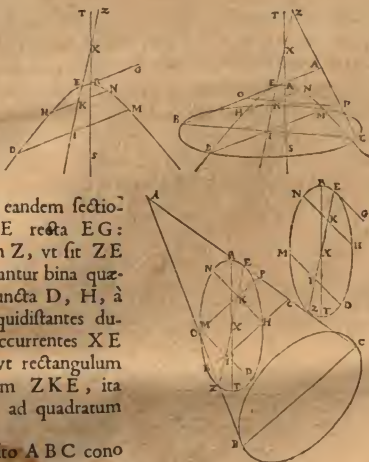
Quoniam enim vt D I quadratum ad E I quadratum, ita est G E ad E I, hoc est ita G E I rectangulum ad E I quadratum: erit quadrato D I æquale rectangulum G E I: itemque & rhombo D I æquale parallelogrammum ipsi æquiangulum G E I, ex 9 huius. Quoniam autem, ex antecedente, vt E I ad E K, hoc est vt G E I rectangulum ad G E K rectangulum, ita est D I quadratum ad H K quadratum: erit, permutando, vt G E I rectangulum ad D I quadratum, ita G E K rectangulum ad H K quadratum: & ita G E K parallelogrammum ad H K rhombum ipsi æquiangulum. Rectangulum autem G E I quadrato D I est æquale: æquale igitur erit & rectangulum G E K quadrato H K: atque etiam rhombo H K æquale parallelogrammum G E K ipsi æquiangulum. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Ex his itaque satis iam manifestum fit, Rectam E L parabolæ D E R diametro, siue etiam axi, R S æquidistantem eiusdem parabolæ etiam diametrum esse, quæ in exposito, in antecedente, cono A B C scaleno ostensa est principalis, siue ex generatione. Eiusque verticem punctum E sectionis quoque esse verticem: & parametrum, siue iuxta quam possunt à sectione ad eandem E L diametrum ordinatim ductæ, esse rectam G E. Atque etiam propter rectas D M, H N æquidistantes in sectione ductas, & bifariam sectas in I, & K, vtramque D I, H K veluti & M I, N K esse à sectione ad eandem E L diametrum ordinatim applicatam. Itaque & à sectione ad quamcunque parabolæ diametrum ordinatim applicatarum quadrata esse inuicem, vt interceptæ ab iisdem eiusdem diametri portiones à vertice inuicem, siue vt rectangula sub ijsdem portionibus & contigua parametro facta inuicem, veluti etiam & rhombos esse inuicem, vt æquiangula parallelogramma sub ijsdem rectis contenta inuicem.

THEOR. XXXI. PROP. XXXII.

Si in hyperbola, aut ellipſi, binæ quælibet rectæ à ſectione ad aſſumptam quamcunque rectam per centrum ductam agantur æquidiſtantes ei quę ſectionem in communi aſſumptę rectæ termino contingit; erunt æquidiſtantium quadrata inuicem, vt rectangula ſub contiguis eiuſdem aſſumptæ partibus à dicto termino & ab altero æqualiter à centro diſtante ſumptis inuicem.



Sit cuiuſcunque coni ſectio hyperbola, aut ellipſis, DER, cuius diameter, ſiue axis, RS, centrum X. Ducta autem ad ſectionem quacunque recta XE, eandem ſectionem contingat in E recta EG: & producta EX in Z, vt ſit ZE æqualis XE: ſumantur bina quælibet in ſectione puncta D, H, à quibus ipſi EG æquidiſtantes ducantur DI, IK occurrentes XE in I, & K: Dico vt rectangulum ZIE ad rectangulum ZKE, ita eſſe quadratum DI ad quadratum HK.

Sit enim in expoſito ABC cono ſcaleno facta ipſa ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, DER. Sectoque primùm ABC cono plano per axem faciente triangulum BAC, & producta DI ad ſectionem in M, intelligatur DM plani conum ſecantis, & in ejus ſuperficie hyperbolam, aut ellipſim, DER formantis & baſis coni, vel circuli ipſi æquidiſtantis, communis ſectio quæ ſit ad BC eiuſdem baſis coni diametrum, aut ipſi æquidiſtantem, perpendicularis. Erit igitur IM æqualis DI, ex 28 huius: quare, & punctum M in ipſa circuli qui baſis eſt coni, aut ipſi æquidiſtat, circumferentia erit. Similiter & producta HK ad ſectionem in N, oſtendetur KN æqualis HK: & punctum N in circuli baſi æquidiſtantis eſſe circumferentia, cuius erit diameter communis eiuſdem cum triangulo per axem ſectio recta OKP ipſi

BC æquidiſtans, ex 2 huius. Quadrato igitur DI æquale erit rectangulum BIC: & quadrato HK æquale rectangulum OKP. Quare, ex 8 huius, vt rectangulum ZIE ad rectangulum ZKE, ita erit quadratum DI ad quadratum HK. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXII. PROP. XXXIII.

Iiſdem poſitis. Si vt DI quadratum ad rectangulum ZIE, ita ſit ſumpta in contingente recta GE ad rectam EZ; erunt contingenti æquidiſtantium à ſectione ad aſſumptam rectam per centrum ductam applicatarum rhombis ſingulis æqualia ſingula æquiangula parallelogramma eidem contingenti adiacentia, lateraque habentia contiguas interceptas à contactu eiuſdem aſſumptæ portiones, & in hyperbola quidem excedentia, at in ellipſi deficientis figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis ei quæ ab aſſumpta per centrum ducta & contingente formatur.

Sint igitur eadem quæ in antecedente. Et vt DI quadratum ad ZIE rectangulum, ita fiat EG ad EZ. Iungaturque ZG quæ in hyperbola producatur. A ſumpto autem quolibet alio in ſectione puncto H ducta ſit ipſi GE æquidiſtans HK, quæ, producta vbi opus, occurrat ZG in N: Dico parallelogrammum EV rhombo ipſi æquiangulo ex HK eſſe æquale.

Producatur DI, vbi opus eſt, vt occurrat ZG in L. Quoniam igitur vt DI quadratum ad ZIE rectangulum, ita eſt GE ad EZ: hoc eſt ita LI ad IZ: ſiue ita LIE rectangulum ad ZIE rectangulum: erit LIE rectangulum quadrato DI æquale. Atque etiam, ex 9 huius, parallelogrammum EL rhombo ex DI ipſi æquiangulo æquale. Sed, ex antecedente, vt ZIE rectangulum ad ZKE rectangulum, ita eſt DI quadratum ad HK quadratum: igitur, permutando, vt ZIE rectangulum ad DI quadratum, ſiue LIE rectangulum, hoc eſt vt ZI ad IL, ita erit rectangulum ZKE ad HK quadratum. Sed vt ZI ad IL, ita eſt ZK ad KV, hoc eſt ita ZKE rectangulum ad rectangulum EKV: igitur vt ZKE rectangulum ad HK quadratum, ita erit ZKE rectangulum ad EKV rectangulum. Quare & quadrato HK æquale erit rectangulum EKV. Ideoque

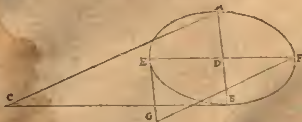
&, ex 9 huius, rhombo ex HK æquale erit parallelogrammum EV ipsi æquiangulum. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Et hinc igitur etiam fit manifestum, Rectam ZEI per centrum X, & contactum E ductam in exposito, in antecedente, ABC cono scaleno eiusdem DER sectionis, siue hyperbolæ, siue ellipsis, diametrum esse principalem, siue ex generatione: eiusdemque verticem punctum E sectionis quoque esse verticem: & transuersam diametrum principalem esse ZE: atque parametrum EG. Nec non & vtramque DI, HK, veluti & MI, NK esse ab eadem sectione ad eandem ZEI diametrum ordinatim applicatam. Ideoque & ordinatim à sectione ad quamcunque hyperboles, vel ellipsis, assumptam diametrum ordinatarum quadrata se habere inuicem, vt rectangula sub contiguis interceptis eiusdem diametri partibus ab vtroque transuersę termino sumptis inuicem. Atque etiam rhombos ex iisdem ordinatis esse inuicem, vt parallelogramma æquiangula sub iisdem diametri partibus contenta inuicem.

THEOR. XXXIII. PROP. XXXIIII.

Si in ellipsi recta diametrum quampiam bifariam diuidens, eiusque contiguæ parametro æquidistans ducatur vtrinque sectione terminata; sectionis erit diameter media inter præassumptas proportione. Et quæ in ipsius altero termino contigua sectionis parameter sumetur in continua omnium erit proportione.



Sit ellipsis AFB, cuius diameter AB, eiusque contigua parameter BC. Secta autem AB bifariam in D, ducatur per D recta EDF ipsi BC parallela. Dico primùm rectam EDF ellipseos AFB esse diametrum: & vt AB ad FE, ita esse FE ad BC. Quoniam enim AB diameter est sectionis, & secta bifariam in D, erit D sectionis centrum. Ideoque & ducta EDF eiusdem sectionis erit diameter, per 29 huius. Est autem EDF ipsi BC parametro æquidistans, ideoque & ad AB diametrum ordinatim

ordinatim applicata: igitur vt AB ad BC, ita, ex. 13 huius, erit ADB rectangulum, hoc est AD quadratum, ad DF quadratum: & ita AB quadratum ad FE quadratum. Quare vt AB ad FE, ita erit FE ad BC.

Hoc præostenso, si ipsi AB æquidistans ponatur EG, quæ se habeat ad EF, vt quadratum AD ad rectangulum EDF; erit EG sectionis AFB parameter ipsi FE diametro contigua. Dico vt BC ad EF, ita esse EF ad AB, & ita AB ad EG.

Quoniam enim vt FE ad EG, ita est FDE rectangulum, hoc est ED quadratum, ad DA quadratum: & ita EF quadratum ad AB quadratum: erit vt EF ad AB, ita AB ad EG. Sed iam vt EF ad AB, ita ostensum est esse BC ad EF: igitur vt BC ad EF, ita erit EF ad AB: & ita AB ad EG. Quod erat demonstrandum.

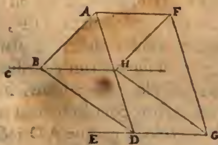
COROLL.

Hinc fit manifestum, Alterutra ellipseos figura, aut ABC, aut FEG, data alteram fore notam: ideoque &, quoniam altera alteri similis est, proportionalis scilicet lateribus, & æquiangula, vtramque propositæ sectionis speciem determinare. Quare si alterutra data proposito minùs conueniens in sequentibus reputetur, altera inuentu facilis erit, & in promptu, quæ proposito satisfaciat, mutata tantùm operationis methodo, at inuariata rei propositæ natura.

LEMMA II. PROP. XXXV.

Si communes binorum planorum se inuicem secantium cum aliquo plano sectiones æquidistantes fuerint inuicem; erit & ijsdem æquidistans communis amborum eorumdem planorum sectio.

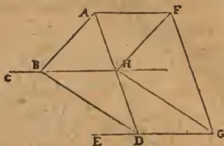
Sint binorum ABC, ADE planorum cum plano per CBD communes sectiones BH, DE æquidistantes inuicem: & sit AF communis amborum ABC, ADE planorum sectio. Dico AF vtrique BH & DE æquidistantem esse.



Sumpto enim in AF quolibet puncto F, ducatur ad DE ipsi AD æquidistans FG: itemque ad BH ipsi DB æquidistans GH: iungaturque FH. Quoniam igitur æquidistant FG, GH ipsis AD, DB: erit planum per FGH plano per ADB æquidistans. Est autem FH & in plano per ABH, & in plano per FGH, ideoque &

N

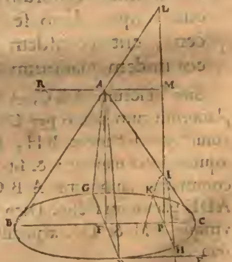
communis amborum ſectio: ſimiliter & A B communis eſt planorum A B D & A B H ſectio: æquidiſtantes igitur erunt planorum A B D, F H G inuicem æquidiſtantium cum plano A B H communes A B, F H ſectiones. Quare & triangulum F H G triangulo A B D ſimile erit: & propter æquales H G, B D etiam æquale. Æqualis igitur erit F G ipſi A D: ideoque & æquidiſtabit A F ipſi D E. Eſtque B H æquidiſtans D E: æquidiſtabit igitur & A F ipſi B H: quare vtrique B H & D E erit A F æquidiſtans. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XXXIIII. PROP. XXXVI.

Si circulum qui baſis eſt coni recta contingat linea in eodem exiſtens plano, & per tactum & coni verticem bina agantur plana, quorum alterum ſuperficiem coni ſecet ſecundum lineam à tactu ad baſis diametrum perpendicularem, alterum eandem contingat: & ſit à quocunque alio ſecanti æquidiſtante plano facta quæcunque in eiuſdem coni ſuperficie hyperbola; contingens planum productum eiuſdem hyperbolæ diametro tranſuerſæ occurret in ſectionis centro.

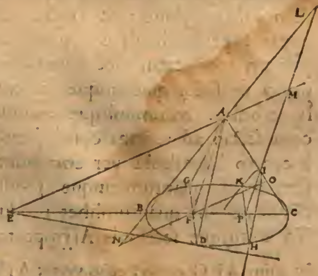
Sit conus A B C, cuius vertex A, baſis B D C circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum B A C. Baſim autem B D C recta D E in eodem exiſtens plano contingat in D puncto, à quo ad B C ducatur perpendicularis D F, per quam & coni verticem A planum agatur coni ſuperficiem & baſim ſecans, facienſque, ex 1 huius, in ſuperficie & baſe coni ſectionem triangulum D A G: perque A D rectam & contingentem D E planum producatur coni ſuperficiem, per 14 huius, contingens. Et ſumpto in B C quolibet alio, præter F, puncto P, ducatur per P recta K P H parallela D G, per quam agatur planum plano per D A G æquidiſtans, ideoque & productæ B A occurrens in L, facienſque, per 5 huius, in ſuperficie coni ſectionem H I K



hyperbolam quamcunque, cuius vertex ſit I, tranſuerſa diameter L I, & intercepta I P. Planumque per A D E producatur. Dico productum hyperbolæ H I K tranſuerſæ diametro L I occurrere.

Quoniam enim eſt punctum A & in plano contingente A D E, & in plano trianguli per axem B A C: alterum alteri planum occurrit in A: ideoque & communis amborum ſectio erit recta linea quæ per A ducetur. Æquidiſtet autem primùm recta D E rectæ B C. Igitur quoniam D E eſt in plano baſis coni B D C, & in plano per A D E: erit amborum planorum communis ſectio recta D E. Similiter & B C amborum B A C, B D C planorum communis ſectio oſtendetur. Quare & communis amborum B A C, A D E planorum ſectio quæ per A ducetur, erit, ex antecedente, ipſis B C, D E æquidiſtans. Ducatur igitur, & ſit R A. Itaque quoniam R A æquidiſtat B C, erunt R A, B C in vno eodemque B A C plano. Et propter æquidiſtantia per A D G, I H K plana erunt amborum communes cum plano trianguli B A C ſectiones, ſcilicet F A, P L etiam æquidiſtantes inuicem. Occurritque R A rectæ F A: igitur & eadem R A ſectionis diametro P L occurret. Quare & eidem occurret planum per R A D E productum. Sit itaque occurſus in M. Dico punctum M eſſe hyperbolæ H I K centrum.

Quoniam enim D E contingens æquidiſtat B C baſis coni diametro, & ad vtramque eſt perpendicularis D G: erit & D G circuli B D C diameter: ſectaque erit B C bifariam in F. Sed, propter æquidiſtantes P L, F A, vt B F ad F A, ita erit A M ad M L: & vt C F, ſiue B F, ad F A, ita erit A M ad M I: æqualis igitur erit M I ipſi M L. Eſtque L I tranſuerſa hyperbolæ H I K diameter: quare & eiuſdem centrum erit M. Planum igitur per A D E productum ſectionis ſiue hyperbolæ H I K tranſuerſæ diametro occurret in M eiuſdem centro. Quod i. erat demonſtrandum.



Non æquidiſtet autem iam contingens D E baſis coni diametro B C, ſed eidem productæ occurrat producta in E: igitur quoniam puncta A, E in vtroque per A D E & per A B C ſunt plano: erit recta A E communis amborum ſectio. Et ei occurrit F A: quare & eidem occurret P L æquidiſtans F A, & in eodem exiſtens plano. Sit igitur rurſus occurſus

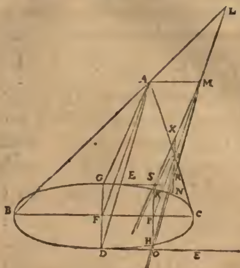
in M. Et ipſi E A M rectæ æquidiſtans ducatur per F recta N F O coincidens A B, vbi opus productæ, in N: & A C, in O. Itaque quoniam B C diameter eſt circuli, & contingens D E, perpendicularisque D F: erit, ex 19 huius, vt C F ad F B, ita C E ad E B: &, permutando, vt C F ad C E, hoc eſt vt F O ad E A, ita F B ad B E: hoc eſt ita F N ad E A. Æqualis igitur eſt F N ipſi F O. Et ſunt æquidiſtantes I L, A F: igitur vt N F ad F A, ita erit A M ad M L: & vt O F, ſiue N F, ad F A, ita erit A M ad M I: æqualis igitur erit rurſus M I ipſi M L. Quare & hoc caſu etiam ſectionis ſiue hyperbolæ H I K centrum erit M. Eſtque punctum M etiam in plano per A D E, quoniam eſt in communi ipſius cum plano trianguli B A C ſectione, nempè in recta E A producta: productum igitur per A D E planum baſis coni circumferentiam contingens, ſectionis ſiue hyperbolæ H I K tranſuerſæ diametro item occurret, eritque occurſus etiam & hoc caſu in M eiuſdem ſectionis centro. Quod 2. erat demonſtrandum.

THEOR. XXXV. PROP. XXXVII.

Si circulum qui baſis eſt coni recta contingat linea in eodem exiſtens plano: & à tactu ad baſis diametrum recta ducatur perpendicularis, per quam & coni verticem planum producatur: & à quolibet alio ipſi æquidiſtante plano ſit facta quæcunque in eiuſdem coni ſuperficie hyperbola: communiſque æquidiſtantis plani & baſis coni ſectio ad rectam contingentem producatur; quæ à centro hyperbolæ per communem earundem occurſum recta quantumcunque producetur linea cum ſectione, etiam quantumlibet producta, non coincidet. Vocabiturque ſectionis Aſymptotos.

Sit enim A B C conus, cuius vertex A, baſis B C circulus, quem in D, aut G, recta contingat linea E D, vel E G, in eodem exiſtens plano. Ductaque ad BC diametrum perpendiculari D F G, per ipſam & coni

& coni verticem A planum producatur conum secans, sectionemque faciens triangulum D A G. Per sumptum autem in B C diametro quodlibet aliud, præter F, punctum P planum agatur ipsi per D A G plano æquidistans, conumque secans, & in eius superficie, per 5 huius, sectionem faciens hyperbolam H I K, cuius sit vertex I, transuersa diameter I L, & centrum M. Communisque plani per H I K & basis coni sectio sit H K, quæ producta contingenti E D, aut E G, occurrat in O, vel S: iungaturque M O, aut M S, & producatur. Dico rectam M O, vel M S, quantumcunque productam sectioni siue hyperbolæ H I K quamtumlibet etiam productæ non coincidere.





Quoniam enim contingit E D, vel E G, recta: planum per A D E, vel A G E, coni superficiem continget, per 15 huius: eritque contactus in linea A D, vel A G. Sed, ex antecedente, planum per A D E, vel A G E, productum hyperboles H I K centro M occurrit: estque punctum O, vel S, in contingente E D, vel E G: puncta igitur A M D O, vel A M G S, in eodem erunt producto per A D E, vel A G E, plano coni superficiem in linea A D, vel A G, contingente. Sunt autem æquidistantia bina per A D G & M O S plana: ideoque & amborum communes cum plano A M D O, vel A M G S, sectiones M O, A D, vel M S, A G, æquidistantes inuicem: quamtumcunque igitur productæ M O, A D, vel M S, A G, inuicem non coincident. Planum autem A M D O, vel A M G S, in quo vtraque est M O, A D, vel M S, A G, coni superficiem in sola A D, vel A G recta contingit: non

coincidet igitur recta MO, vel MS, quamtumcunque producta coni superficiei. Quare nec sectioni siue hyperbolæ HIK, quæ in ipsa superficie est vnquam coincidet. Diceturque sectionis Asymptotos. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXVI. PROP. XXXVIII.

Iisdem positis; quæ à vertice sectionis ad vtramlibet asymptoton recta ducetur linea communi plani secantis & basis coni sectioni æquidistans poterit quadrato, vel rhombo, spatium æquale quadranti figuræ sectionis ad transuersam diametrum factæ.

Maneant enim eadem quæ in antecedente. Et ab I vertice hyperbolæ HIK ducatur recta IR, aut IX, æquidistans HK, & alterutri MO, aut MS, asymptoto occurrens in R, aut X. Sitque sectionis parameter, siue coefficiens figuræ latus recta IN. Dico rectam IR, vel IX, posse quadrato, vel rhombo, spatium æquale quadranti figuræ quæ lineis LI, IN continetur.

Quoniam enim, propter æquidistantia MOP, ADF plana, æquidistantes sunt rectæ MO, AD: itemque AF, MP: & FD, PO: erit triangulum MPO triangulo AFD simile. Ideoque vt AF quadratum ad FD quadratum, siue BFC rectangulum, ita erit MP quadratum ad PO quadratum: & ita MI quadratum ad IR quadratum. Sed vt AF quadratum ad BFC rectangulum, ita, ex 14 huius, est LI ad IN, hoc

eſt ita L I quadratum, vel rhombus, ad rectangulum, vel parallelogrammum, L I N: & ita quadrans, quadratum ſcilicet, vel rhombus, M I, ad quadrantem rectanguli, vel parallelogrammi, L I N: igitur vt M I quadratum, vel rhombus, ad quadrantem rectanguli, vel parallelogrammi, L I N, ita erit M I quadratum ad I R quadratum: & ita M I rhombus ad I R rhombum. Quadratum igitur, vel rhombus, I R æquabitur quadranti rectanguli, vel parallelogrammæ figuræ, L I N. Eademque ratione & quadrato, vel rhombo, I X æqualis demonſtrabitur quadrans eiuſdem rectanguli, vel parallelogrammæ figuræ, L I N: igitur recta I R, vel I X, poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ quæ lineis L I, I N continetur. Quod erat demonſtrandum.

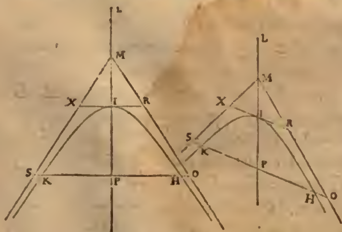
COROLL.

Igitur, Quoniam & recta H K ordinatim ad I P diametrum eſt applicata, ex 5 huius; quæ à vertice hyperbolæ ad vtramlibet aſymptoton recta ducetur ordinatim ad diametrum applicatis æquidiſtans poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ ad eandem diametrum factæ. Eiuſque quadratum ad quadratum interceptæ à centro, ſiue ad dimidiæ tranſuerſæ diametri quadratum, ſe habebit vt parameter ad eandem tranſuerſam diametrum: ſiue vt coefficiens figuræ latus ad tranſuerſum.

THEOR. XXXVII. PROP. XXXIX.

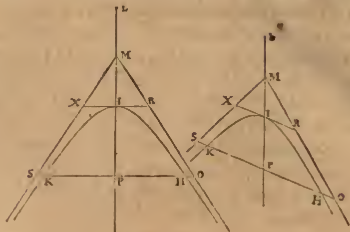
Si in hyperbola ducta recta linea bifariam ſecetur, & vtrinque producta cum vtraque aſymptoto conueniat; erit quadranti figuræ ad diametrum per bifariæ ſectionis punctum ductam factæ æquale vnumquodque rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum, ſub partibus ſectæ vtrinque à ſectione factis contentum.

Sit hyperbola H I K, cuius aſymptoti M S, M O, & centrum M. Ducta autem in ſectione recta K H, & bifariam ſecta in P, vtrinque producta cum aſymptotis M S, M O conueniat in S, & O:



iungaturque M P. Dico vnumquodque rectangulum, aut parallelo-

grammum, SKO, SHO quadranti figuræ ad MP diametrum factæ esse æquale.



Iuncta enim MP hyperbolam secans in I producatur in L, vt sit ML æqualis MI. Sectionis igitur vertex erit I, & transuersa diameter IL. Ducatur per L recta XIR æquidistans KH. Igitur quoniam MP sectionis est diameter, & HK bifariam secta in P: erit, ex coroll. ad 11 huius, recta KH ad MP diametrum ordinatim applicata. Eique æquidistat XIR vtrinque asymptoto terminata: vtraque igitur IX, IR, ex anteced. coroll. poterit quadrato, vel rhombo, spatium æquale quadranti figuræ ad IL transuersam diametrum factæ. Quoniam autem vt MI quadratum ad IR quadratum, hoc est vt MP quadratum ad PS quadratum, ita est, ex coroll. antecedente, transuersum figuræ ad LMP diametrum factæ latus ad coefficiens: & ita, ex coroll. ad 13 huius, rectangulum, siue parallelogrammum, LPI ad quadratum, siue rhombum, PK: erit vt totum MP quadratum, vel rhombus, ad totum PS quadratum, vel rhombum, ita ablatum LPI rectangulum, vel parallelogrammum, ad ablatum PK quadratum, vel rhombum. Quare & ita erit reliquum MI quadratum, vel rhombus, ad reliquum SKO rectangulum, vel parallelogrammum. Sed ita etiam erit MI quadratum, vel rhombus, ad IX quadratum, vel rhombum: hoc est, ex anteced. ad quadrantem figuræ ad LI transuersam diametrum factæ: quadrato igitur, vel rhombo, IX, siue quadranti eiusdem figuræ, æquale erit rectangulum, siue parallelogrammum, SKO. Eademque ratione & quadrato, vel rhombo, IR, siue eiusdem figuræ quadranti, ostendetur æquale rectangulum, vel parallelogrammum, SHO: quare constat propositum. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I.

Hinc fit euidens, Omnia bina rectangula, siue parallelogramma, sub partibus singularum æquidistantium vtrinque à sectione & asymptoto sumptis contenta esse inuicem æqualia. Quoniam singula omnia eidem quadranti figuræ ad diametrum, quæ æquidistantes bifariam diuidit, factæ ostensa sunt æqualia.

COROLL. II.

COROLL. II.

Atque etiam hinc ſequitur neceſſariò, Cuiuſcunque rectæ intra aſymptotos ductæ portiones vtrinque ſectione & aſymptoto interceptas eſſe inuicem æquales.

THEOR. XXXVIII. PROP. XL.

Hyperbola & aſymptoti propiùs ſemper ad ſe ipſas accedent quo longiùs producentur, & ad interuallum tandem peruenient dato quolibet interuallo minus.



Sit, vt in antecedente, hyperbola HIK, cuius aſymptoti MS, MO, diameter MP, ad quam ordinatim ſit applicata KH vtrinque producta, & aſymptotis terminata in S, & O. Sumpto autem in diametro MP quantumlibet producta quolibet puncto T, ducatur in ſectione recta VTY æquidiſtans KH, & vtrinque producta aſymptotis occurrat in Q, & Z. Dico punctum V ad rectam MS productam propiùs accedere, quam punctum K.

Sit enim tranſuerſa diameter LI: & ducta per I verticem recta XIR æquidiſtans KH. Igitur, quoniam maior eſt LT quàm LP, & maior IT quàm IP: erit rectangulum LTI maius rectangulo LPI. Sed vt rectangulum LTI ad rectangulum LPI, ita eſt, ex 8 huius, quadratum TV ad quadratum PK: maior igitur erit & TV quàm PK. Eſt autem & TZ maior quàm PO: quoniam & MT maior eſt quàm MP: igitur & VZ maior erit quàm KO. Sed, ex antecedente, rectangulum, vel parallelogrammum, QVZ rectangulo, ſiue parallelogrammo æquiangulo, SKO eſt æquale: quoniam & vtrumque quadrato, vel rhombo IR, vel IX, oſtenſum eſt æquale: ideoque vt VZ ad KO, ita eſt SK ad QV: maior igitur erit SK quàm QV. Et eſt angulus KSM angulo VQM æqualis: punctum igitur V propiùs accedit ad rectam MS productam quàm punctum K. Eademque ratione & punctum Y ad MO productam propiùs accedere oſtendetur quàm punctum H. Conſtat igitur hyperbolam HIK, & vtramlibet MS, aut MO, aſymptoton productas propiùs ſemper ad ſe ipſas accedere. Dico inſuper & ad interuallum quolibet dato interuallo minus tandem peruenire.

Sit enim datum quodcunque interuallum recta α. Siquidem KS

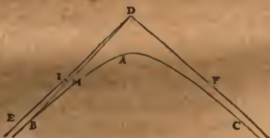
minor eſt quàm recta α: iam conſtat propoſitum. Sin autem æqualis ſit, aut maior: ſumatur in KS recta NS maior quàm α: vel etiam ipſi æqualis. Ductaque MK in Y, vt ſit MK ad MY, veluti eſt NS ad SK: ducatur per Y recta QYZ æquidiſtans KH, vtrinque aſymptoto terminata in Q, & Z, & à ſectione diuiſa in V. Rectangulum igitur, aut parallelogrammum, QVZ rectangulo, aut parallelogrammo æquiangulo, SKO eſt æquale, ex antecedente: ideoque vt VZ ad KO, ita erit KS ad VQ. Maior autem eſt VZ quàm YZ: quare & maior erit ratio VZ ad KO, quàm YZ ad KO. Sed vt YZ ad KO, ita eſt MY ad MK: hoc eſt ita KS ad SN: igitur maior erit ratio VZ ad KO, hoc eſt KS ad VQ, quàm KS ad SN. Quare & minor erit VQ quàm NS. Punctum igitur V propiùs accedet ad aſymptoton MQ, quàm ſit interuallum α. Quare & ſectio, ſiue hyperbola HIK producta in V propiùs accedit ad productam MS aſymptoton, quàm ſit idem datum α interuallum. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XXXIX. PROP. XLI.

Si angulum aſymptotis contentum recta quæpiam diuidat linea; producta interceptæ ſectioni tandem occurret.

Sit hyperbola BAC, cuius aſymptoti DE, DF. Angulum autem EDF recta diuidat linea quæcunque DG. Dico rectam DG productam ſectioni, ſiue hyperbolæ, BAC tandem occurrere.



Sumpto enim in DG quolibet puncto H, ductaque ad DE perpendiculari HI: oſtendetur, vt in antecedente, ſectionem BAC & aſymptoton DE propiùs ad ſe inuicem accedere, quàm ſit interuallum HI. Quare producta BAC ſectio rectæ DG productæ priùs occurrat omninò neceſſe eſt. Occurrit igitur & recta DG ſectioni, ſiue hyperbolæ BAC. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc, & ex demonſtratis in 29 huius patet, Rectam DG hyperbolæ BAC vnam eſſe è diametris.

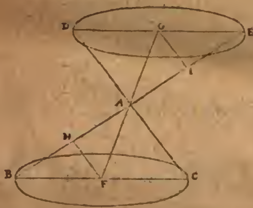
MONITVM.

Sed & , vt quæcunque hactenus de singularibus hyperbolis in singularibus conis factis sunt proposita & demonstrata, etiam oppositis sectionibus, siue hyperbolis, in binis oppositis conis factis conuenire, & vtriusque communia esse probemus: hæc insuper de ipsis proponemus.

THEOR. XL. PROP. XLII.

Si coni ad verticem existentes plano per axem secentur; erunt facta triangula ad verticem posita similia, & eorum bases æquidistantes inuicem.

Sint bini oppositi coni A B C, A D E plano per axem secti faciente bina triangula B A C, D A E. Dico triangulum D A E triangulo B A C esse simile: & basim D E basi B C esse æquidistantem.



Siquidem enim vtrumque per axem triangulum isosceles est: propter æquales ad communem verticem angulos: iam constat propositum.

Si secus autem: quoniam oppositi sunt ABC, ADE coni: erunt eorum axes in directum, ex definit. Et sunt ambo BAC, DAE triangula per axem: quare in vtraque BC, DE centrum erit circuli qui basis est coni. Secta igitur BC bifariam in F, erit F centrum: ductaque FA, & producta, axis erit communis, occurrens DE diametro in centro G. Quare & DE secta erit bifariam in G. Ducatur FH alterutri AB aut AC æquidistans: & ipsi FH parallela agatur GI. Quoniam igitur vt BF ad FC, ita est EG ad GD: & ita BH ad HA: & EI ad IA: & vt HA ad HF, ita est IA ad IG: ex æquali erit vt BH ad HF, hoc est vt BA ad AC, ita EI ad IG: hoc est ita EA ad AD. Estque BAC angulo æqualis verticalis EAD angulus: quare triangulum DAE triangulo BAC simile erit: eritque DEA angulus alterno ABC angulo æqualis. Quare & recta DE rectæ BC parallela erit. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

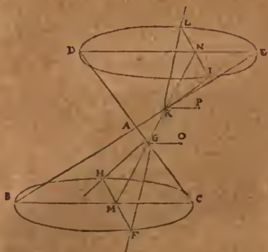
Hinc satis patet, Quoniam triangulorum per axem bases sunt communes ipsorum cum oppositis conorum basibus

ſectiones: & omnia per axem oppoſita triangula oppoſitas baſes habent parallelas: binos quoſlibet ad verticem poſitos conos oppoſitas baſes habere inuicem æquidiſtantes.

THEOR. XLI. PROP. XLIII.

Si coni ad verticem exiſtentes plano ſecentur non per verticem; erunt factæ in oppoſitis ſuperficiebus oppoſitæ ſectiones hyperbolæ, quarum communis erit tranſuerſa diameter: & vnius parameter alterius parametro æqualis erit & æquidiſtans.

Sint oppoſiti coni A B C, A D E, quorum baſes circuli B C, D E, & communis vertex A, qui plano non per verticem A tranſeunte ſecentur: & ſint factæ in oppoſitis ſuperficiebus oppoſitæ ſectiones F G H, I K L. Dico, primùm, ſectiones FGH, I K L eſſe hyperbolas, quarum communis ſit tranſuerſa diameter G K.



Sint enim plani per F G I L H & oppoſitarum baſium communes ſectiones F H, I L; erunt F H, I L æquidiſtantes inuicem: quoniam & ipſæ baſes B C, D E, ex anteced. coroll. ſunt æquidiſtantes inuicem. Secetur itaque vterque A B C, A D E conus plano per axem quod ſectiones in oppoſitis baſibus faciat B E, D E ipſis F H, I L perpendiculares: communiſque plani per axem, & plani per F G I L H ſectio ſit recta M N, quæ ſectionibus occurrat in G, & K: & ipſis F H, I L in M, & N. Quoniam igitur vterque A B C, A D E conus plano per axem ſectus faciente bina B A C, D A E triangula, rurſus plano per M N vtrique laterum trianguli per axem vltra verticem occurrente in G, & K ſecatur ſecundum lineam ad baſis diametrum perpendicularem: erit vtraque facta in vtriuſque coni ſuperficie ſectio, per 5 huius, hyperbola, cuius communis erit tranſuerſa diameter G K.

Hiſque poſitis: ſit G O hyperbolæ F G H parameter ipſi G K tranſuerſæ diametro contigua: & hyperbolæ I K L eidem G K contigua parameter ſit K P. Dico inſuper & rectam K P æqualem eſſe & æquidiſtantem G O.

Cum enim ſit vt B M ad M K, ita E N ad N K: & vt C M ad M G, ita D N ad N G: erit, componendo, vt rectangulum B M C, hoc eſt quadratum F M, ad rectangulum K M G, ita rectangulum

E N L,

END, hoc eſt quadratum IN, ad rectangulum GNK. Sed vt quadratum FM ad rectangulum KMG, ita eſt ſectionis parameter GO ad tranſuerſam diametrum GK, ex coroll. 2. ad 12 huius: & vt quadratum IN ad rectangulum GNK, ita eſt parameter KP ad tranſuerſam diametrum KG. Igitur vt GO ad GK, ita erit & KP ad KG. Hyperbolæ igitur IKL parameter KP hyperbolæ FGH parametro GO erit æqualis. Intelligatur iam recta GO ſectionem FGH in G contingere in eodem exiſtens plano: & recta KP etiam ſectionem IKL contingat in K, & in eodem ſit plano. Igitur quoniam vtraque FH, IL perpendicularis eſt ad circuli diametrum: erit & vtraque bifariam ſecta, FH quidem in M, & IL in N. Quare & vtraque, ex coroll. ad 11 huius, ad communem MN diametrum ordinatim erit applicata. Vtraque autem GO, KP ſectionem in vertice contingit: ideoque & GO æquidiſtans eſt FH, & KP æquidiſtans IL, ex corollarijs ad 17 huius: ſuntque æquidiſtantes FH, IL: igitur & KP erit æquidiſtans GO. Quare & oppoſitarum FGH, IKL ſectionum communis erit GK tranſuerſa diameter: & vnius parameter KP alterius parametro GO æqualis erit & æquidiſtans. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

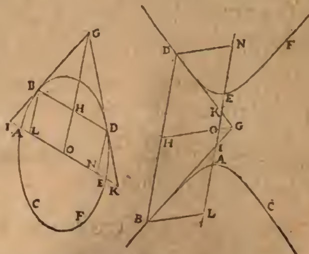
Hinc igitur fit euidens, Rectas quæ ab oppoſitis ſectionibus ad communem quamcunque diametrum ordinatim applicantur, atque etiam quæ in terminis communis tranſuerſæ diametri oppoſitas ſectiones contingunt, inuicem eſſe æquidiſtantes.

COROLL. II.

Quin etiam ex his ſequitur, Binarum oppoſitarum ſectionum ſiue hyperbolarum idem eſſe ſiue commune centrum, & communes omnes tranſuerſas diametros, ideoque & axem communem. Inſuper, & communes eſſe aſymptotos, communeſque vmbilicos. Quoniam & ad communem tranſuerſum axem factæ vtriuſque figuræ ſimiles ſunt, & æquales: earumque quadrantes æquales: & quadranti primariæ figuræ æquale rectangulum ad communem tranſuerſum axem applicatum æquali exceſſu excedit vtrinque: ſuntque diametri portiones vtrinque à centro & vertice ad vmbilicum interceptæ æquales.

THEOR. XLII. PROP. XLIIII.

Si ellipsim, aut oppositas sectiones binæ rectæ contingant inuicem occurrentes; quæ ab occursu ad medium lineæ tactus coniungentis recta ducetur linea sectionum erit diameter, diametro, quæ rectæ tactus coniungenti æquidistat, coniugata.



Sint ellipsis, vel oppositæ sectiones B A, D E, quas contingant in B, & D rectæ B G, D G inuicem occurrentes in G. Iunctaque B D, & bifariam secta in H, iungatur G H. Sit autem A E transuersa sectionum diameter ipsi B D æquidistans. Dico rectam G H sectionum esse diametrum ipsi A E transuersæ diametro coniugatam.

Sint enim puncta K, I in quibus contingentes B G, D G diametro A E occurrunt: & punctum O in quo G H ipsam A E secat. Productaque A E vtrinque, vbi opus, ad ipsam ordinatim sint applicatæ B L, D N. Æquidistat igitur D N ipsi B L, ex anteced. coroll. 1. ideoque & parallelogrammum erit D L: rectaque D N ipsi B L erit æqualis. Sed propter communem A E transuersam diametrum, & æquales vtriusque sectionis contiguas parametros, ex anteced. vt E L A rectangulum ad B L quadratum, ita erit A N E rectangulum ad D N quadratum: & permutatim: rectangulum igitur A N E rectangulo E L A æquale erit. Quare vt N A ad A L, ita erit L E ad E N: &, in ellipsi diuidendo, in oppositis verò sectionibus componendo, vt N L ad L A, ita erit L N ad N E. Æqualis igitur erit E N ipsi A L: atque etiam A N ipsi E L. Quoniam autem, propter ordinatim applicatas B L, D N, & contingentes B G, D G diametro A E occurrentes in I, & K, vt E L ad L A, ita est, ex 19 huius, E I ad I A: & vt A N ad N E, ita est A K ad K E: erit vt E I ad I A, ita A K ad K E, & diuidendo, vel componendo, vt E A ad A I, ita erit A E ad E K. Æqualis igitur erit & E K ipsi A I. Sed propter æquidistantes B D, I K, & æquales B H, H D, etiam & recta K O rectæ O I est æqualis: igitur & recta E O rectæ OA etiam æqualis erit. Ideoque & O sectionum centrum erit. Quare, ex definit. recta G O H ellipseos, siue

oppositarum B A, D E sectionum erit diameter ipsi transuersæ diametro A E coniugata. Quod erat demonstrandum.

Coroll. I.

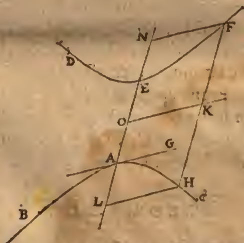
Itaque, Si recta quæpiam, vt B D, ellipsi, aut oppositis sectionibus vtrinque occurrens bifariam secetur; quæ à centro ad eius medium ducetur sectionum diameter erit, transuersæ diametro, quæ rectæ bifariam sectæ æquidistat, coniugata. Et in ellipsi, ex 34 huius, & ex definit. secunda erit diameter.

Coroll. II.

Constat insuper Rectangulum sub partibus rectæ ab occursu contingentium ad medium lineæ tactus coniungentis ductæ à centro factis quadranti figuræ ad diametrum tactus coniungenti æquidistantem factæ esse æquale. *Hoc enim in 27 huius iam demonstratum est.*

Theor. XLIII. Prop. XLV.

Si oppositarum sectionum alteram recta contingat linea; quæ per centrum eidem æquidistans ducetur, sectionum communis erit diameter communi per tactum ductæ diametro coniugata.



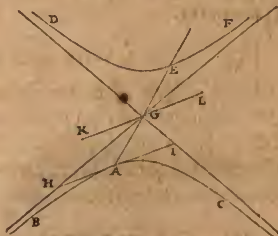
Sint oppositæ sectiones B A C, D E F, quarum commune centrum sit O, communisque diameter A O E. Contingat autem sectionem BAC in A recta A G, cui æquidistans ducatur O K. Dico O K oppositarum sectionum communem esse diametrum diametro A O E coniugatam.

A quolibet enim in recta O K puncto K ducta sit ipsi A O E diametro æquidistans F K H vtrinque oppositæ sectioni occurrens in F, & H. Ordinatimque ad AE diametrum sint applicatæ F N, H L. Ostendetur igitur, vt in antecedente, recta F N rectæ H L æquidistans & æqualis: rectaque EN æqualis A L. Quare & O N æqualis erit O L: ideoque & K F etiam æqualis erit K H. Estque vtrumque F & H punctum in sectione: igitur recta O K æquidistantes A E, H F vtrinque sectione termi-

natas bifariam ſecans vtriuſque B A C, D E F ſectionis erit diameter ipſi A E tranſuerſæ diametro coniugata. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XLIIII. Prop. XLVI.

Si oppoſitarum ſectionum alteram recta contingat linea vtrinque aſymptotis terminata; quæ eidem æqualis & æquidiſtans per centrum ducetur ab ipſo bifariam ſecta, ſectionum communis erit ſecunda diameter.



Sint oppoſitæ ſectiones B A C, D E F quarum commune centrum ſit G: aſymptoti H G, G I. Contingat autem B A C ſectionem in A recta HAI vtrinque aſymptotis terminata in H, & I: eique æqualis & æquidiſtans ducatur KGL bifariam ſecta in G. Dico rectam K G L oppoſitarum B A C, D E F ſectionum ſecundam eſſe diametrum.

Ducatur per A & centrum G diameter A G E. Igitur quoniam contingit A I, & aſymptoto terminatur in I: quadranti figuræ ad A E tranſuerſam diametrum factæ æquabitur quadratum, vel rhombus, ex A I: ex coroll. ad 38 huius. Eademque ratione & eidem quadranti figuræ æquabitur quadratum, vel rhombus, ex A H. Igitur & figuræ ad A E tranſuerſam diametrum factæ æquabitur quadratum, vel rhombus, ex H I, hoc eſt ex K L. Quare & vtraque H I, & K L media proportionalis erit inter eiuſdem figuræ latera. Tranſit autem K L per centrum G, & ab ipſo bifariam ſecatur: atque ordinatim ad A E diametrum applicatis eſt æquidiſtans, quoniam & rectæ A I ſectionem in vertice contingenti æquidiſtat: igitur recta K L, ex definit. oppoſitarum B A C, D A E ſectionum ſecunda diameter erit. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XLV. Prop. XLVII.

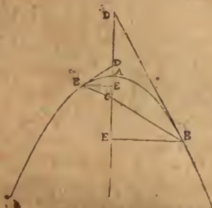
Si parabolem recta contingat linea cum axe producto conueniens; quæ à tactu ad ſectionis vmbilicum recta ducetur, æqualis erit axis portioni vmbilico & recta ſectionem in eodem præaſſumpto puncto contingente interceptæ.

Sit parabola A B, cuius vertex A, vmbilicus C, ideoque & axis

A C.

A C. Sectionem autem contingat in B recta B D cum axe producto conueniens in D. Iungaturque B C. Dico rectam B C rectæ C D esse æqualem.

Ordinatim enim ad axem applicata sit B E: erit, ex 18 huius, A E æqualis A D: eritque B E quadratum rectangulo sub A E & recta parametro, hoc est sub D A & quadrupla A C æquale. Est autem & C B quadratum quadratis E B & E C æquale: igitur C B quadratum æquale erit quadruplo D A C rectangulo, vna cum quadrato C E. Quoniam autem quadratum D C æquale est quadratis D A & A C, vna cum duplo D A C rectangulo: quorum quadratum D A, hoc est A E, æquale est quadratis A C, C E, vna cum duplo A C E rectangulo: & duplum A C E rectangulum vna cum duplo A C quadrato æquale est duplo E A C, hoc est D A C, rectangulo: si quidem punctum E est in producta A C: at si puncta A, C interiacet; quadrato A C æqualia erunt A E & E C quadrata, vna cum duplo A E C rectangulo: quorum duplum A E C rectangulum vna cum duplo A E quadrato rursus duplo E A C, hoc est D A C, rectangulo erit æquale: vtroque casu erit & D C quadratum etiam quadrato C E, & quadruplo D A C rectangulo æquale. Ideoque & D C quadratum æquale erit B C quadrato. Recta igitur D C rectæ C B erit æqualis. Quod erat demonstrandum.



COROLL. I.

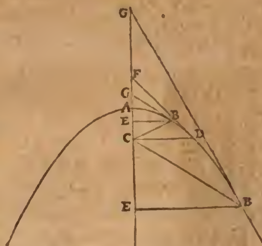
Hinc igitur fit manifestum, Si parabolam recta quęcunque contingat linea cum producto axe conueniens; rectam quę à tactu ad sectionis vmbilicum ducetur angulum cum contingente facere ęqualem ei qui ab axe & eadem contingente continetur.

COROLL. II.

Itaque, Si parabolam recta quæcunque contingat linea vtrinque producta: & à tactu binæ educantur rectæ lineæ, altera ad vmbilicum, altera axi æquidistans; eductæ huiusmodi lineæ æquales ad contingentem constituent angulos.

THEOR. XLVI. PROP. XLVIII.

In omni parabola, recta linea quæ ab vmbilico ad sectionem educetur ordinatim ad axem applicata, interceptæ axis portionis erit dupla. Et quæ ab eodem vmbilico ad sectionem aliter educetur, ęqualis erit eidem axis portioni vertice & vmbilico interceptæ, vnà cum eiusdem axis portione inter verticem & ordinatim ab eductæ termino applicatam intercepta.



Sit parabola A B, cuius axis A C, vmbilicus C. Sit autem ad A C axem ordinatim applicata C D. Dico C D ipsius A C esse duplam.

Contingat enim sectionem in D recta D F. Erit igitur A F æqualis A C. Sed sunt æquales, ex anteced. rectæ C D, C F: igitur & C D erit ipsius A C dupla. Quod erat 1. demonstrandum.

Sit autem quomodocunque aliter educta C B: & ad axem ordinatim applicata sit B E. Dico C B æqualem esse ipsis A C, A E simul sumptis.

Contingat enim rursus sectionem in B recta B G: igitur & A G æqualis erit A E: & C B æqualis C G. Estque C G æqualis binis A G, hoc est A E, & A C rectis: quare & iisdem binis A E, A C rectis æqualis erit B C. Quod 2 erat demonstrandum.

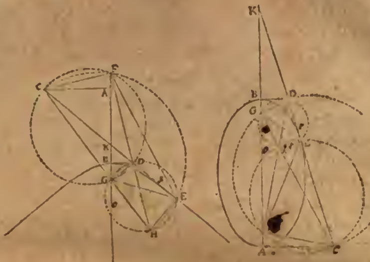
THEOR. XLVII. PROP. XLIX.

Si hyperbolem, aut ellipsim, recta contingat linea; quæ à tactu ad vtrumque sectionis vmbilicum rectæ ducentur lineæ æquales ad contingentem angulos facient.

Sit hyperbola, vel ellipsis, E B, cuius axis transuersus A B. Et quartæ parti figuræ ad axem A B factæ æquale sit vnumquodque A G B, B F A rectangulum: hoc est sint vtriusque sectionis vmbilici F, & G. Sectionem autem contingat in E recta E D C: iunganturque E F, E G. Dico angulum G E D angulo F E C esse æqualem.

Ordinatim enim applicentur A C, B D contingenti E C occurrentes

in C, & D. Rectangulum igitur A C, B D, ex 26 huius, rectangulo A G B erit æquale. Quare vt C A ad A G, ita erit B G ad B D. Iunctis igitur C G, G D, propter vtrumque ad A & B angulum rectum, erit angulus B D G angulo A G C æqualis. Quare ambo ad G æquales erunt vni recto. Rectus igitur erit & C G D angulus. Similiter quoniam, permutando, vt A C ad A F, siue B G, ita est A G, hoc est F B, ad B D: iunctis C F, F D, rectus etiam ostendetur C F D angulus. Circulus igitur circa C D diametrum descriptus per puncta F, G transibit. Erecta autem perpendiculari E H quæ occurrat F D, productæ vbi opus, in H: erit, propter C F D angulum rectum, triangulum E D H triangulo F D C simile. Quare vt F D ad D C, ita erit E D ad D H. Sed, propter similitudinem triangulorum F D C, hoc est A G C, & B D G, vt F D ad D C, ita est B D ad D G: igitur vt B D ad D G, ita erit E D ad D H: &, permutando, vt B D ad D E, ita erit G D ad D H. Propter angulum autem G D H externum angulo F C G interno æqualem, & vtrumque ad F & G rectum, vt G D ad D H, ita erit F C ad C H productam aut rescisam in H: occurrit igitur vtraque F D, C G rectæ E H in H. Quare circa diametrum C H descriptus circulus per puncta F & E transibit. Eademque ratione & circa diametrum D H descriptus circulus per puncta G & E transibit. Erit igitur in circulo C F E H angulus C H F angulo F E C æqualis. Similiter & in circulo G D E H angulus G H D, hoc est C H F, angulo G E D æqualis erit. Angulus igitur G E D angulo F E C æqualis erit. Quod erat demonstrandum.



THEOR. XLVIII. PROP. L.

Si hyperbolem, aut ellipsim, recta contingat linea: & ab vtroque vmbilico ad tactum binæ inclinentur lineæ; quę à centro ad contingentem ducetur alterutri æquidistans, dimidio transuersi axis æqualis erit.

Sint enim eadem quæ in antecedente: centrumque sectionis sit I·

Et alterutri G E aut F E æquidiſtans ducatur I L occurrens contingenti E C in L. Dico I L eſſe æqualem I B.

Iungantur enim F L, B L, A L: & per F ipſi I L æquidiſtans ducatur ad contingentem F N. Quoniam igitur angulus F E C æqualis eſt, ex antecedente, angulo G E D: & æquidiſtat F N ipſi G E; erit & angulus F N E angulo F E N æqualis: ideoque & F N æqualis F E. Sunt autem F I, I G æquales: quoniam & A I, I B æquales ſunt, itemque A F, B G: & æquidiſtat I L ipſis G E, F N: æqualis igitur eſt N L ipſi L E: & ideò F L perpendicularis eſt ad L E. Quare circulus circa F C diametrum deſcriptus tranſibit per puncta L, A. Æqualis igitur erit F L A angulus angulo F C A. Sed ipſi F C A angulo oſtenſus eſt æqualis vterque D C G, D F G angulus: &, propter vtrumque F B D, F L D angulum rectum, circulus circa diametrum F D deſcriptus per puncta L, B tranſibit: ideoque & angulus D L B angulo D F B, ſiue D F G, æqualis erit: igitur & ipſi F C A angulo, hoc eſt angulo F L A, æqualis erit D L B angulus. Quare communi addito in hyperbola quidem angulo D L A, & in ellipſi B L F, erit angulus B L A angulo D L F æqualis. Sed eſt D L F angulus rectus: & rectus igitur erit angulus B L A. Quare circa diametrum A B circulus deſcriptus per punctum L tranſibit: eritque radius I L radio I B, hoc eſt dimidio A B axis tranſuerſi, æqualis. Quod erat demonſtrandum.

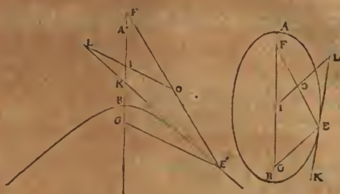
THEOR. XLIX. PROP. LI.

Si in hyperbola aut ellipſi ab vtroque vmbilico ad idem ſectionis punctum binę inclinentur rectę linee; in hyperbola maior minorem quantitate tranſuerſi axis ſuperabit: & in ellipſi erunt ſimul tranſuerſo axi ęquales.

Sit hyperbola, vel ellipſis, B E, cuius axis tranſuerſus A B, vmbilici F, G. Sumpto autem quolibet in ſectione puncto E, agantur F E, G E: Dico in hyperbola rectam F E ſuperare G E quantitate axis A B: & in ellipſi ipſas F E, G E ſimul ipſi axi A B eſſe æquales.

Sit

Sit enim ſectionis centrum I. Et per E contingens ducatur E L, cui à centro I occurrat in L recta I L æquidiſtans G E: & producatur L I in O. Quoniam igitur, ex 49 huius, angulus G E K æqualis eſt angulo F E L, & ipſi G E æquidiſtat L O; erit O L E angulus angulo O E L æqualis: ideoque & recta O L ipſi O E æqualis. Sunt autem & I G, I F æquales: quare & O E ipſi O F æqualis erit. Ideoque & F E ipſius O L erit dupla. Quoniam autem, ex antecedente, recta I L dimidio axi tranſuerſo, hoc eſt I B, æqualis eſt: erit in hyperbola recta F E ipſarum I B, I O dupla. Sed ipſius I O dupla eſt G E: quare F E ipſi G E, & inſuper duplæ I B, hoc eſt axi A B, erit æqualis. Superat igitur F E rectam G E quantitate tranſuerſi axis A B. At in ellipſi cum ſit A B axis rectæ I A ſiue I L duplus, & G E recta dupla rectæ I O, atque E F dupla rectæ O L: erunt G E, E F ſimul rectæ I L, aut I A, duplæ: hoc eſt ipſi tranſuerſo axi A B æquales. Quod erat demonſtrandum.

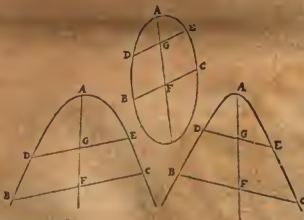


PROBLEMA I. PROP. LII.

Data quacunque coni ſectione; eiuſdem diametrum inuenire.

Sit data quæcunque coni ſectio B A C: oportet eiuſdem diametrum inuenire.

Ducantur vtcunque in ſectione binæ rectæ BC, DE, quæ bifariam ſecentur in F & G. Iunctaque FG ſectioni occurrat in A. Dico rectam A G F propoſitæ B A C ſectionis eſſe diametrum.

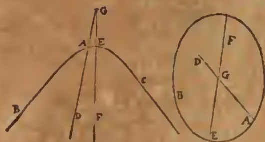


Quoniam enim æquidiſtant D E, B C: eaſque bifariam diuidit in G & F recta A G F: erit, ex definit. recta A G F propoſitæ B A C ſectionis diameter problemati ſatisfaciens.

PROBL. II. PROP. LIII.

Data quacunque hyperbola, aut ellipsi; eiusdem centrum inuenire.

Sit data quæcunque hyperbola, aut ellipsis, BAC: oportet eiusdem centrum inuenire.



Inueniantur, per antecedentem, binæ quæcunque eiusdem diametri AD, EF quæ, productæ vbi opus, conueniant in G. Dico punctum G esse propositæ BAC sectionis centrum. Hoc autem patet ex definit. ~~Ter.~~

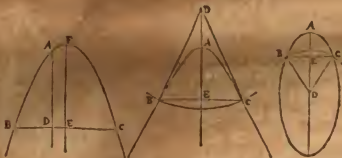
COROLL.

Itaque, Si vnicuique AG, EG productæ æqualis recta in continuum apponatur; erit vtraque sic producta sectionis transuersa diameter, ex definitione centri.

PROBL. III. PROP. LIIII.

Data quacunque coni sectione; eiusdem axem inuenire.

Sit data quæcunque coni sectio BAC: oportet eiusdem axem inuenire.



Sit primùm proposita coni sectio parabola. Ducatur igitur, per 52 huius, diameter quæcunque AD: cui ad rectos angulos in sectione ducatur recta BDC. Si quidem BC bifariam secta est in D; erit AD axis quæsitus. Sin autem, secetur BC bifariam in E: & per E agatur EF æquidistans AD, sectionique occurrens in F. Dico EF propositæ BAC parabolæ axem esse.

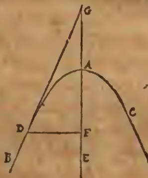
Quoniam enim EF diametro AD æquidistat: erit EF, ex 28 huius, etiam diameter. Sed EF rectam BC in sectione ductam bifariam secat, & ad rectos angulos: ex definit. igitur erit EF propositæ BAC parabolæ axis.

Sit autem proposita B A C sectio hyperbola, vel ellipsis. Inueniatur, per antecedentem, centrum D. Et centro D descripta circuli circumferentia sectioni B A C occurrat in duobus B & C punctis: iunctaque B C, & bifariam secta in E, ducatur D E & producatur. Dico D E esse propositæ B A C hyperbolæ, aut ellipsis, axem.

Iungantur enim D B, D C. Quoniam igitur sunt D B, D C æquales, & æquales B E, E C: erit ducta D E ad B C perpendicularis. Transitque D E per centrum D: quare, ex 29 huius, diameter erit D E. Sed & rectam B C in sectione ductam bifariam & ad angulos rectos diuidit: igitur, ex defin. sectionis axis erit D E. Sunt igitur inuenti axes. Quod facere oportebat.

PROBL. IIII. PROP. LV.

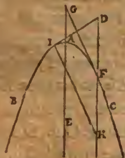
Data quacunque coni sectione, & puncto non intra sectionem dato; ab eodem rectam lineam ducere quæ sectionem contingat.



Sit proposita quæcunque coni sectio B A C: datumque punctum D, vt præscriptum est: oportet per D rectam lineam ducere quæ sectionem B A C contingat.

Sit primùm B A C sectio parabola: & punctum D datum in ipsa sectionis linea. Exhibeaturque, per antecedentem, parabolæ B A C axis A E, si quidem punctum D vertici A coincidit; erecta indidem perpendicularis sectionem continget, ex 17 huius. Sin autem: à dato puncto D ducatur ad axem A E perpendicularis D F: productaque F A vltra sectionem in G, vt sit A G æqualis A F: ducatur D G. Dico rectam D G sectionem siue parabolam B A C contingere in D. Hoc enim in 20 huius iam ostensum est.

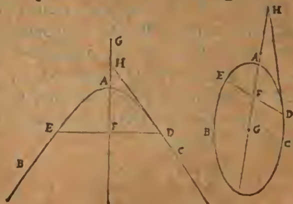
Idemque sequetur si dato puncto G in axe, & sumpta A F æquali A G, erigatur perpendicularis F D quæ sectioni occurrat in D. Namque & G D sectionem in eodem D puncto continget: ex eadem 20 huius, & ad eam coroll.



Non sit autem iam datum D punctum in sectione, neque in axe, sed in quocunque loco extra sectionem. Ducatur per D axi A E æquidistans D H, sectioni occurrens in F: atque à puncto F in sectione dato ducatur, vt iam dictum est, contingens F G: sumptaque F H æquali F D, ducatur ipsi F G parallela H I sectioni occurrens in I: iungaturque D I. Dico rectam D I sectionem B A C contingere in I.

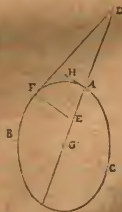
Quoniam enim D F H axi A E æquidistat: diameter erit sectionis;

ex coroll. ad 28 huius: eiusque vertex erit F. Est autem HI contingenti FG æquidistans: ordinatim igitur ad FH diametrum applicata est IH, ex coroll. 2 ad 17 huius, & est DF æqualis FH: igitur, ex 20 huius, recta DI sectionem, siue parabolam BAC continget in I.



Sit rursus proposita BAC sectio hyperbole, aut ellipsis: & datum punctum D primùm in sectione. Ducatur per D recta quæcunque in sectione DE, & bifariam secetur in F. Inuento autem centro G, per 53 huius, ducatur diameter GF sectioni occurrens in A: tum quadrato AG æquale fiat rectangulum FGH: ducaturque DH. Dico rectam DH sectionem BAC contingere in D. Hoc autem fit manifestum, ex conuersa 23 huius, & per generale consectarium ad 27.

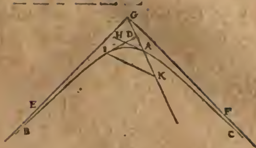
Similiter & dato puncto H in vtriusque sectionis diametro, siue in axe, quod in hyperbola sit intra centrum sectionis & verticem, & in ellipsi extra ipsam sectionem: si fiat quadrato interceptæ à centro, hoc est dimidiæ transuersæ diametri, siue axis, vt GA, æquale rectangulum sub interiecta eiusdem parte centro & puncto dato, vt GH, & alia recta quæ sit GF: & ipsi GF perpendicularis excitetur FD, si quidem GF axis est: sin autem, ducta per A sectionem contingente, vt dictum est, eidem æquidistans ducatur FD sectioni vtroque casu occurrens in D puncto; ducta recta HD sectionem BAC in eodem D puncto continget. Hoc enim &, ex eadem 23 huius, fit manifestum.



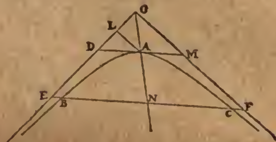
Sit iam data BAC sectio ellipsis, & datum D punctum vbilibet extra sectionem. Sumatur centrum G, ducaturque DG sectioni occurrens in A. Inuentoque sectionis axe, à puncto A in sectione dato ducatur AH ipsam contingens, vt iam dictum est: tum quadrato AG æquale fiat rectangulum DGE: & per E agatur contingenti AH parallela EF sectioni occurrens in F: iungaturque DF. Dico rectam DF sectionem BAC contingere in F. Hoc enim etiam ex conuersa 23 huius manifesto sequitur.

Sit rursus proposita BAC sectio hyperbola, cuius centrum sit G: asymptoti autem GE, GF. Datumque punctum D primum intra angulum EGF. Ducatur ad sectionem per D recta GDA, producaturque intra sectionem in K, vt quadrato GA æquale sit rectangulum DGK. Inuento autem axe, & à puncto A in sectione dato ducta

ducta contingente A H: eidem per K æquidiſtans ducatur K L ſectioni occurrens in I: ducaturque D I. Dico rurſus rectam D I ſectionem B A C contingere in I. Cuius demonſtratio antecedenti eadem erit.

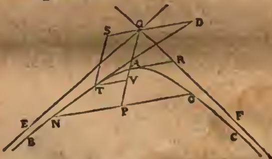


Sit iam datum punctum D in vna aſymptoto. Sectaque D G bifariam in L, ducatur L A alteri aſymptoto G F æquidiſtans occurrenſque ſectioni in A: iungaturque D A. Dico rectam D A ſectionem B A C contingere in A.



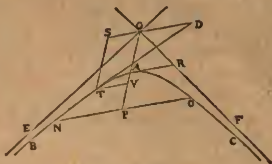
Producatur enim D A in M, & ipſi D M æquidiſtans ponatur E F ſectioni occurrens in B, & C: ducaturque G A, & producatur in N. Igitur quoniam L G æqualis eſt D L, erit & A M æqualis D A: atque etiam N F æqualis E N. Sed, ex coroll. 2 ad 39 huius, & C F æqualis eſt E B: quare & N C æqualis erit B N. Secta igitur erit B C bifariam in N: ideoque & diameter erit G A N, & ad ipſam ordinatim applicata B C: ex coroll. ad 11 huius. Eſt autem & punctum A ſectionis vertex, ex definit. & D A M æquidiſtans eſt B C: recta igitur D A, ex 17 huius, ſectionem B A C continget in A.

Sit denique datum D punctum in angulo deinceps ei qui ab aſymptotis continetur. Ducatur igitur per centrum G recta D G, & producatur. Sumpto autem in ſectione quolibet puncto N, ducatur in eadem recta N O æquidiſtans D G, & bifariam ſecetur in P: ductaque G P hyperbolem ſecante in A, ducatur ipſi N O æquidiſtans A R aſymptoto occurrens in R: quadratoque A R æquale ponatur rectangulum D G S: & per S ipſi G P æquidiſtans ponatur S T ſectioni occurrens in T: iungaturque D T. Dico rectam D T ſectionem B A C contingere in T.



A puncto enim T ad G P ducatur ipſi N O æquidiſtans T V. Quoniam igitur N O bifariam eſt ſecta in P: erit per centrum G ducta G P ſectionis diameter, & ad eam ordinatim applicata N P, per 11 huius, & ad eam coroll. Secat autem G P diameter hyperbolem in A:

quare & A sectionis erit vertex. Estque A R ducta æquidistans N P: quare & sectionem B A C continget in A, per 17 huius. Estque punctum R in vna asymptoto: igitur, ex 38 huius, recta AR poterit quadrantem figuræ ad G P diametrum factæ. Quare & eidem quadranti figuræ æquale erit rectangulum D G S, hoc est D G, V T, ideoque, ex conuersa 27 huius, & coroll. ad eandem, recta D T sectionem B A C continget in T. Quod facere oportebat.



Si detur autem punctum T intra angulum qui ad verticem est angulo hyperbolem continenti; impossibile erit problema, & absurdè propositum. Quoniam hoc casu recta à dato puncto ad sectionem quomodocunque ducta alterutram tantùm asymptoton secans, & angulum qui sectionem continet diuidens, tandem producta sectioni occurret, ipsamque secabit: ex demonstratis in 40 & 41 huius.

COROLL.

Itaque, ex proximè demonstratis, Constat qua ratione à quolibet in sectione puncto ad datam quamcunque diametrum recta ordinatim sit applicanda: si nempè ei quæ sectionem in datæ diametri vertice continget æquidistans à dato in sectione puncto ducatur.

PROBL. V. PROP. LVI.

Data cuiuscunque coni sectionis diametro: contiguam eiusdem parametrum exhibere.

Sit coni sectio B A C primùm parabola, eiusque data diameter quæcunque A D: oportet contiguam eiusdem parametrum exhibere.



Ducatur per anteced. sectionem B A C contingens in A recta A E: & à quolibet in A D puncto D ducatur ad sectionem recta D B æquidistans A E: quadrato autem B D æquale fiat rectangulum D A E. Dico A E esse parabolæ B A C parametrum ipsi A D diametro contiguam. Hoc autem manifestò constat ex 10 huius.

Sit autem proposita sectio BAC hyperbola, aut ellipsis, eiusque data diameter quæcunque AD. Inueniatur, per coroll. ad 54 huius, transuersa diameter AF: & per A ducatur sectionem contingens AE, cui à quolibet in AD puncto D ad sectionem ducatur æquidistans DB: & quadrato DB æquale ponatur rectangulum ADG: iunctaque FG rectam AE secet in E. Dico rectam AE esse sectionis BAC parametrum ipsi AD diametro contiguam. Hoc enim etiam ex 13 huius manifestò constat. Quare exhibita est cuiuscunque coni sectionis diametro contigua parameter. Quod facere oportebat.

PROBL. VI . PROP. LVII.

Datæ cuiuscunque hyperbolæ asymptotos inuenire.

Sit data hyperbola BAC: oportet eiusdem asymptotos inuenire.



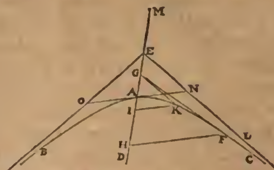
Inueniatur sectionis diameter quæcunque AD, centrumque E, & transuersa diameter AM. Sectionem autem contingat in A, per 55 huius, recta AG quæ sit, per antecedentem, sectionis parameter ipsi AD diametro contigua: & rectangulo, vel parallelogrammo, MAG æquale ponatur quadratum, vel rhombus, ex AH: sectaque AH bifariam in N, iungatur EN, & producatur: productaque HA in O, vt sit AO æqualis AN, iungatur item EO, & producatur. Dico EN, EO productas propositæ BAC hyperbolæ esse asymptotos.

Quoniam enim contingit AH; erit ordinatim ad AD diametrum applicatis æquidistans, ex coroll. 2 ad 17 huius. Sed rectangulo, aut parallelogrammo, MAG, hoc est figuræ sub vtroque latere MA, AG factæ æquale est quadratum, aut rhombus, AH: estque AN dimidia AH: recta igitur AN poterit quadrato, vel rhombo, quartam partem quadrati, vel rhombi, ex AH, hoc est quadrantem figuræ MAG: ideoque &, per ea quæ in 38 huius, & ad eam coroll. sunt demonstrata, ostendetur, ex conuerso, rectam EN à centro ductam, & quantumcunque productam sectioni BAC non coincidere, vnamque ex eiusdem asymptotis esse. Eademque ratione, quoniam & AO æqualis est AN, ducta EO etiam quantumcunque producta sectioni BAC non coincidet. Quare rectæ EN, EO productæ erunt propositæ BAC hyperbolæ asymptoti inuentæ. Quod facere oportebat.

ALITER.

Sit data BAC hyperbola, cuius sit diameter quæcunque AD,

vertex A, centrum E. Ducta autem contingente AN, à sumpto in sectione quolibet puncto F ducatur contingens FG cum producta D A diametro conueniens in G: ipsique AN æquidistans ducatur FH: & secta GH bifariam in I, ducatur IK æquidistans AN, sectionique occurrens in K: tum ductæ GK æquidistans à centro E ducatur EL. Dico rectam EL sectioni BAC non coincidere, eiusque vnam esse ex asymptotis.

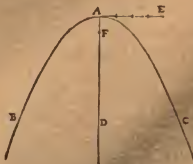


Secet enim EL rectam AN in N: & apponatur EM æqualis & in directum EA. Erit igitur AM transuersa sectionis diameter. Est autem rectangulo MIA vnà cum quadrato EA æquale quadratum EI: cui, propter æquales GI, IH, etiam æquale est rectangulum HEG, hoc est, propter contingentem FG, ex 22 huius, quadratum EA, vnà cum quadrato GI: rectangulo igitur MIA vnà cum quadrato EA æquale erit quadratum EA vnà cum quadrato GI: ablatoque communi EA quadrato, erit reliquum GI quadratum reliquo MIA rectangulo æquale. Quoniam autem, ex coroll. 2 ad 13 huius, vt MIA rectangulum, hoc est GI quadratum, ad IK quadratum, ita est transuersa diameter MA ad contiguam parametrum: & ita EA quadratum ad AN quadratum: cum sit EA dimidia transuersa diameter; recta AN poterit quadrato, vel rhombo, spatium æquale quadranti figuræ ad MA transuersam diametrum factæ. Quare rursus ducta ENL hyperbolæ BAC non coincidet quantumcunque producta, eritque eiusdem asymptotos inuenta. Itaque & sic problemati satisfactum erit.

PROBL. VII. PROP. LVIII.

Propositarum coni sectionum vmbilicos inuenire.

Sit proposita BAC coni sectio primùm parabola: inueniaturque axis AD, per 54 huius: & per 56 recta parameter AE: quadrantique ex AE æqualis sumatur AF. Dico punctum F esse propositæ BAC parabolæ vmbilicum. Hoc autem ex definit. satis patet.

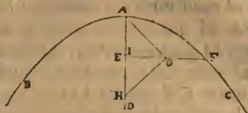


Aliter in parabola vmbilicus adhuc inuenietur.

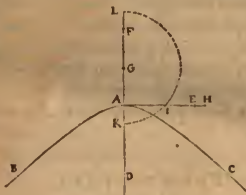
Sit parabola BAC, eiusque axis AD: & sumpto in axe AD quolibet puncto E, erigatur perpendicularis EF, sectioni occurrens in F: sectaque

sectaque E F bifariam in G, iunctæ A G perpendicularis excitetur GH. Sumpta A I æquali E H: Dico punctum I esse vmbilicum quæsitum.

Quoniam enim quadratum E F rectangulo sub A E & recta parametro est æquale: erit quadrati E F quadrans, scilicet quadratum E G, rectangulo sub eadem A E & quadrante rectæ parametri æquale. Sed propter angulum A G H rectum, & rectum ad E, eidem EG quadrato æquale est AEH, hoc est EAI rectangulum: recta igitur AI quadranti rectæ parametri erit æqualis. Ideoque & punctum I, ex definit. propositæ B A C parabolæ erit vmbilicus.

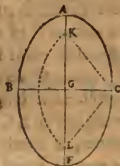


Sit iam proposita B A C sectio hyperbola: inueniaturque axis transuersus A F, & recta parameter A E, centrumque G: & rectangulo sub F A, A E æquale fiat quadratum A H: sectaque A H bifariam in I, centro G interuallo G I descripta circuli circumferentia axem A F vtrinque productum secet in duobus K & L punctis: Dico punctum K propositæ B A C hyperbolæ vmbilicum esse internum: & punctum L eiusdem vmbilicum esse externum.



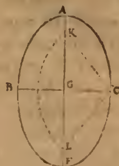
Quoniam enim angulus G A E rectus est: erit quadrato A I, hoc est quartæ parti figuræ, siue rectanguli, FAE æquale rectangulum L A K. Est autem G L æqualis G K: itemque G F æqualis G A: ideoque & reliqua F L reliquæ A K æqualis: rectangulum igitur K F L, hoc est A L F, rectangulo L A K, hoc est F K A, erit æquale. Applicatum igitur est ad axem transuersum F A rectangulum quartæ parti figuræ ad eundem axem factæ æquale, excedens vtrinque quadrato rectæ A K, vel F L. Quare, ex definit. erunt puncta L, K propositæ B A C hyperbolæ vmbilici, hic internus, ille externus.

Sit autem proposita B A C sectio ellipsis: inueniaturque axis maior A F, & centrum G: ducta igitur per centrum G ipsi A F perpendicularis B G C erit axis minor. Centro itaque B, aut C, interuallo A G descripta circuli circumferentia secet axem A F in punctis K, & L. Dico puncta K, L propositæ B A C ellipseos esse vmbilicos.



Quoniam enim A F axis est, & perpendicularis G C: erit G C ordinatim ad axem A F applicata. Quare, ex coroll. 2 ad 13 huius, vt G C quadratum ad rectangulum A G F, hoc est ad A G quadratum, ita

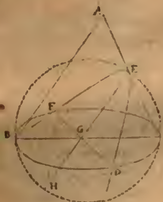
erit recta parameter ad A F axem transuersum. Vt autem recta parameter ad axem transuersum, ita est rectangulum, siue figura, sub vtrisque ad quadratum axis transuersi: & ita quadrans figuræ ad quadrantem quadrati axis transuersi, scilicet ad quadratum A G: quadranti igitur figuræ ad axem factæ æquale erit quadratum G C. Est autem C K æqualis A G, & quadratum C K æquale est quadratis K G, G C: quadratumque A G æquale quadrato K G, & rectangulo F K A: communi igitur ablato K G quadrato, erit reliquum F K A, hoc est, propter æquales A K, L F, rectangulum L A K, reliquo G C quadrato, hoc est quadranti figuræ ad axem factæ æquale. Sed & similiter eidem G C quadrato, siue quadranti figuræ, æquale est A L F, siue K F L, rectangulum: applicatum igitur est ad axem transuersum A F rectangulum æquale quadranti figuræ ad eundem axem factæ ex vtraque parte deficiens quadrato rectæ A K, vel F L. Quare, ex definit. erunt puncta K, L propositæ B A C ellipseos vmbilici. Quos inuenire oportebat.



PROBL. VIII. PROP. LIX.

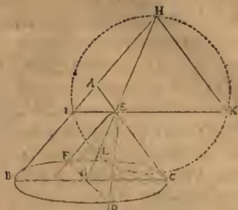
Cuiuscunque in cono exhibitæ sectionis parametrum exhibere.

Sit conus A B C, & exhibita in eo sectio D E F primùm parabola, cuius sit diameter E G: oportet eiusdem contiguam parametrum exhibere.



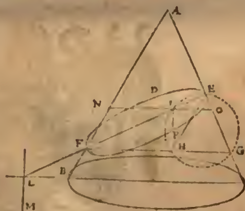
Intelligatur A B C conus & plano primùm per axem sectus faciente triangulum B A C, & plano rursus per D E F sectus secundum lineam D G F quæ sit ad B C basim trianguli per axem perpendicularis. Sitque E G communis plani per D E F & trianguli per axem sectio. Descriptaque per tria B, E, C puncta circuli circumferentia productam E G diametrum secet in H. Dico rectam G H æqualem esse sectionis parametro.

Quoniam enim D G F perpendicularis est ad B C; erit D G æqualis G F: quare & vtraque erit ad E G diametrum ordinatim applicata, ex coroll. ad 11 huius. Itaque, propter sectionem, quadrato D G, hoc est rectangulo B G C, æquale erit rectangulum sub E G intercepta diametro, & contigua eiusdem parametro. Sed eidem B G C rectangulo æquale etiam est rectangulum E G H: recta igitur G H eidem sectionis parametro erit æqualis.



Sit iam exhibita in cono ABC ſectio DEF hyperbola, cuius ſit diameter EG. Intelligatur, vt priùs, ABC conus plano primùm per axem ſectus faciente triangulum BAC, rurſus etiam ſectus plano faciente ſectionem DEF ſecundum lineam DGF ad BC baſim trianguli per axem perpendicularem: & ſit EG communis eiuſdem per DEF plani, & trianguli per axem ſectio, quæ producta cum producto BA latere conueniat in H: ductæque HK æquidiſtanti AC occurrat in K recta IEK æquidiſtans BC, occurrenſque AB in I: & deſcripta per tria H, I, K puncta circuli circumferentia ſecet EG diametrum in L. Dico rectam EL ſectionis parametro eſſe æqualem.

Quoniam enim DGF perpendicularis eſt ad BC: ideoque & DG æqualis eſt GF, & vtraque ad EG diametrum ordinatim eſt applicata; propter ſectionem vt DG quadratum, hoc eſt BGC rectangulum, ad HGE rectangulum, ita erit ſectionis parameter ad contiguam tranſuerſam diametrum. Sed ratio BGC rectanguli ad HGE rectangulum compoſita eſt ex rationibus BG ad GH, hoc eſt IE ad EH, & GC ad GE, hoc eſt EK ad EH: ideoque vt rectangulum BGC ad rectangulum HGE, ita eſt rectangulum IEK, hoc eſt LEH, ad quadratum EH: igitur vt rectangulum LEH ad quadratum EH, hoc eſt vt LE ad EH, ita erit ſectionis parameter ad contiguam tranſuerſam diametrum. Eſtque EH, ex definit. tranſuerſa ſectionis diameter: recta igitur LE eiuſdem contiguæ parametro erit æqualis.



Sit denique exhibita in cono BAC ſectio DEF ellipſis, cuius ſit diameter EF. Intelligatur igitur adhuc conus ABC plano primùm per axem ſectus faciente triangulum BAC, rurſus etiam ſectus plano per DEF ſecundum lineam LM quæ ſit ad BC baſim trianguli per axem perpendicularis: ſitque EF communis plani per DEF, & trianguli per axem ſectio: ductaque FG æquidiſtante BC, ad ipſam ducatur EH æquidiſtans AB: & deſcripta per tria E, H, G puncta circumferentia circuli ſecet EF diametrum in I. Dico rectam FI ſectionis parametro eſſe æqualem.

Ducantur enim per I rectæ NIO æquidiſtans BC, & IP æquidiſtans LM. Secto igitur ABC cono plano per NO, IP, erit ſectio

NPO circulus basi coni æquidistans, per 2 huius: cuius, & plani per DEF communis sectio erit recta IP ad EI sectionis diametrum ordinatim applicata: ex coroll. ad 6 & 11 huius. Sed, propter sectionem, vt PI quadratum, hoc est NIO rectangulum, ad FIE rectangulum, ita est parameter ad FE transuersam diametrum: estque ratio rectanguli NIO ad rectangulum FIE composita ex rationibus NI ad IF, hoc est HF ad FE, & OI ad IE, hoc est GF ad FE: ideoque, componendo, vt NIO rectangulum ad FIE rectangulum, ita est GFH, hoc est EFI, rectangulum ad FE quadratum: igitur vt EFI rectangulum ad FE quadratum, hoc est, vt FI ad FE, ita erit parameter ad FE contiguam transuersam diametrum. Quare & recta FI sectionis parametro ipsi FE transuersæ diametro contiguæ erit æqualis. Exhibita igitur est vniuscuiusque in cono propositæ sectionis parameter. Quod facere & demonstrare oportebat.

PRIMI LIBRI FINIS.

Ad ſecundum Conicorum librum

MONITVM.

Habes iam, Lector φιλόμαθης, expoſitam coni ſectionum generationem: atque etiam, nî fallimur, probè ſatis cognitam propriam cuiuſque naturam. Habes præmiſſa præcipua elementa conica, quibus, vt fundamentis, tota conicorum moles innititur. Siquidem ab ipſis ad ſolidorum problematum, ſi lubet, ſolutiones & compoſitiones tibi Apollonium Pergæum ſiue imitanti, ſiue omninò aut pro parte ſepultum exſuſcitanti, facilis paratur methodus & aperta patet via. Sed certè ad radij phyſici vtriuſque, ſiue reflexi, ſiue refracti, notitiam & examen, qui noſter ſcopus eſt, nobis ab iiſdem norma petenda fuit, & hinc nobis ſiue eruendus, ſiue componendus fuit lapis Lydius, totaque ratio deſumenda.

Quoniam autem vix, aut ſaltem parùm, profuturum ſit coni ſectionum ortum & propriam naturam cognouiſſe, ſi non illas quaqua ratione exprimere, &, vbi opus, imitari liceat, atque ſic ad proprios & neceſſarios vſus accommodare: eapropter proximè ſequenti libro geometricam ipſas per puncta deſcribendi rationem & methodum multimodam proſequi opportunum nobis viſum eſt, vnde omnimoda earumdem figuratio mechanica, ſiue inſtrumentalis, ortum facilè ducat, & fidem accipiat. Quanquam & qui compendioſiores per puncta deſcriptiones probè nouerit, & in ipſis aliquandiu ſe exercuerit, reliquas organicas haud dubiè ſpreuerit, vt quæ non æquè latè pateant, nec ita in promptu ſint. Quandoquidem & mechanicæ conicarum linearum figurationes vix optatis aptè reſpondent, & ſæpè ſæpiùs ad opus deficiunt, & inutiles tandem dignoſcuntur, niſi cautè & induſtriè atque etiam ingenioſa manu tractentur. Agnoſcent illicò qui vnum aut alterum, ſiue Apollonianum, ſiue noſtrum, ſchœma imitari, nedum reſtituere aggredientur: & qui ad optatum ſpeculum, aut ad propoſitam lentem diaphanam, propriam conicam lineam exprimere tentabunt. Quibus vtriſque præſtandis ſequentem proximè librum, ſi frequentiùs ad praxim reuocetur, facturum ſatis pollicemur. Nec aliundè nobis ad eadem opem quamcunque allatam teſtamur.

Sed & operæpretium hîc monuiſſe duximus, conſultò nos in

ſecundo hoc libro ſingulis deſcribendarum conicarum linearum methodis propria theoremata præmiſiſſe quæ ipſis fidem aſtruant: quò ſcilicet, primò, propria cuiuſque coni ſectionis, rectarumque ipſi inſcriptarum aut adſcriptarum natura eluceſcat magis & notior fiat, ideoque & hic ſecundus liber antecedenti aptiùs cohæreat: deinde vt compendioſior nonnihil reddatur vnaquæque propoſitæ conicæ lineæ deſcriptio, dum quæſita & exhibita in ipſa puncta omnia plerumque vno eodemque ſigno aut charactere notantur, & vna eademque via & ratione inuenta exhibentur.

Nec te mouere debet, quod in eodem hoc libro ſiue in theorematibus comparata, ſiue in problematibus quæſita puncta nonnunquam in certa aut ſpecie data hyperbola, vel ellipſi, proponantur: quaſi in nondum maturam meſſem falce immiſſa: quandoquidem hyperbolæ & ellipſes ſpecie datæ, ſiue mauis certæ, ſunt quarum figuræ ſunt cognitæ, vt ſuo notabitur loco. Quare & propoſito magis congruum viſum eſt ſpecie datarum hyperbolarum, vel ellipſium, deſcriptionem inſtituere è datis figurarum lateribus, tranſuerſa ſcilicet diametro, & contigua parametro, vnà cum angulo ab ipſis contento: quàm ſimplicem indeterminatarum hyperbolarum, aut ellipſium, formationem proponere.





CLAVDII MYDORGII

PATRICII PARISINI

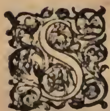
CONICORVM

LIBER SECVNDVS.

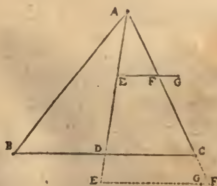
De Geometrica Conicarum linearum in plano per puncta descriptione.

AD GENERALEM METHODVM I.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.



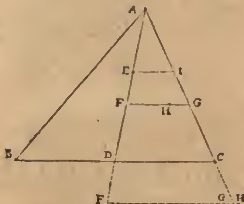
SI sit triangulum quodlibet BAC, cuius basis BC bifariam secta sit in D: à quolibet autem ductæ, &, vbi opus, productæ AD puncto E facta EF parallela DC quæ occurrat AC in F, rectangulo CD, EF æquale fiat quadratum EG: Dico punctum G esse in eadem parabola quæ per puncta B, A, C transit.



Quoniam enim rectangulo CD, EF æquale est quadratum EG; erit vt CD ad GE, ita GE ad FE: & vt CD quadratum ad EG quadratum, ita CD ad FE. Sed vt CD ad FE, ita est AD ad AE: igitur vt AD ad AE, ita erit CD vel BD quadratum ad GE quadratum. Posita igitur AD paraboles diametro, & vertice A, erit vtraque GE, CD, vt & BD, à sectione ad AD diametrum, per 4 & 6 primi huius, ordinatim ducta. Quare & punctum G in eadem erit parabola quæ per puncta B, A, C transit. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROP. II.

Si ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ducta autem AD vtcunque ſecta in E, à ſumpto in ED, etiam quandolibet producta, quolibet puncto F ducatur FG parallela DC quæ occurrat AC in G: fiatque rectangulo EFG æquale quadratum FH: Dico punctum H eſſe in eadem certa hyperbola, cuius ſit vertex E.



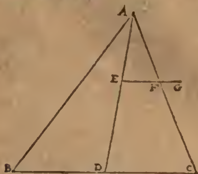
Quoniam enim quadratum FH rectangulo EFG factum eſt æquale; erit vt GF ad HF, ita HF ad FE: & vt GF quadratum ad HF quadratum, ita erit GF ad FE: hoc eſt ita rectangulum GFA ad rectangulum EFA: &, permutando, vt GF quadratum ad rectangulum GFA, hoc eſt vt GF ad FA, ita erit quadratum HF ad rectangulum AFE. Sed facta EI parallela DC, erit vt GF ad FA, ita IE ad EA: igitur vt IE ad EA, ita erit HF quadratum ad rectangulum AFE. Poſita igitur AE hyperboles tranſuerſa diametro, & EI eiuſdem contigua parametro, ideoque & E eiuſdem vertice, erit recta HF à ſectione ad EF diametrum ordinatim ducta: per corol. 2 ad 13 primi huius. Quare punctum H in eadem erit certa hyperbola cuius ſit vertex E, tranſuerſa diameter EA, & contigua parameter EI. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. III. PROP. III.

Si ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: à quolibet autem in AD puncto E ducta EF parallela DC, quæ occurrat AC in F, rectangulo DEF æquale ponatur quadratum EG: Dico puncta A, G, D eſſe in eadem certa ellipſi.

Quoniam enim rectangulo DEF æquale factum eſt EG quadratum; erit vt FE ad EG, ita EG ad ED: & vt FE quadratum ad EG quadratum, ita erit FE ad ED, hoc eſt ita AEF rectangulum ad AED rectangulum: &, permutando, vt FE quadratum ad AEF rectangulum, hoc eſt vt FE ad EA, ſiue vt CD ad DA, ita erit

EG quadratum ad AED rectangulum. Posita igitur AD ellipseos transuersa diametro, & DC eiusdem contigua parametro, erit GE à sectione ad AE diametrum ordinatim ducta: per coroll. 2 ad 13 primi huius. Quare & puncta A, G, D in eadem erunt certa ellipsi, cuius transuersa diameter sit AD, & contigua parameter DC. Quod erat demonstrandum.



CONSECTARIVM.

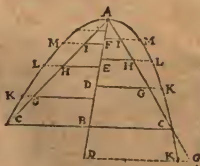
Itaque Quotiescunque aliquod proponetur triangulum bifariam recta à vertice ad mediam basim ducta diuisum, & ab aliquo puncto ad bisecantem recta ducetur basi æquidistans, cuius quadratum rectangulo designatorum in tribus præmissis theorematibus alicui similiter facto fuerit æquale; assumptum eiusmodi punctum in certa aliqua coni sectione dicetur esse cuius erit diameter recta triangulum bifariam diuidens. *Quare & hinc manabit*

GENERALIS METHODVS I.

PROBLEMA I. PROP. IIII.

Circa datam quamcunque diametrum & ordinatam parabolam in plano per puncta quotlibet describere.

Sit proposita recta AB describendæ paraboles diameter quæcunque, sitque BC vna ex ordinatim ad ipsam ductis in angulo ABC dato. Oportet circa datas eiusmodi AB, BC parabolam in eodem plano per puncta describere.

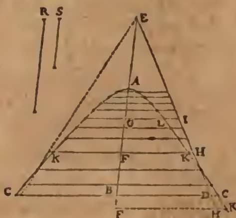


Iungatur AC: sectaque AB, vel AC, in quotlibet partes, per singula diuisionum puncta ipsi BC parallelæ agantur, vt DG, EH, FI, &c. singulisque BC, DG, BC, EH, BC, FI, & reliquis eiusmodi rectangulis singula fiant DK, EL, FM, &c. æqualia quadrata. Palam est ex 1. huius, propter triangulum CAC recta AB bifariam diuisum, puncta M, L, K in eadem fore parabola quæ per A, C puncta transit. Quare si æquabili manus ductu eadem A, M, L, K, C puncta

curua iungantur linea; erit illa parabole quæſita in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. II. PROP. V.

Circa datam quamcunque diametrum & ordinatam hyperbolam ſpecie notam per puncta in plano deſcribere.

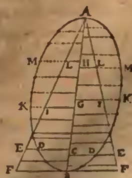


Sit A B quæſitæ hyperboles diameter quæcunque, & B C ad ipſam ordinatim ducta in angulo A B C dato. Species autem ſectionis ſit ratio tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum eadem quæ R ad S. Oportet circa propoſitas A B, B C hyperbolam datæ ſpeciei in eodem plano per puncta deſcribere.

Quadrato B C æquale fiat A B D rectangulum: & vt S ad R, ita ſit B D ad B E: iungaturque D E. Sumptis autem in A B, vel etiam producta, quotlibet punctis vt F, G, parallelæ totidem ipſi B C agantur F H, G I: & ſingulis A F H, A G I rectangulis æqualia ponantur ſingula F K, G L, quadrata. Erunt, ex 2 huius, propter triangulum D E D recta E B bifariam diuiſum, puncta L, K, C in eadem hyperbola cuius ſit A vertex, & A E tranſuerſa diameter ſe ad contiguam parametrum habens vt E B ad B D, hoc eſt vt R ad S. Quare ſi eadem A, L, K, C, & reliqua eiuſmodi puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. III. PROP. VI.

Circa datam diametrum & ordinatam ellipſim ſpecie notam per puncta in plano deſcribere.



Sit A B quæſitæ ellipſeos tranſuerſa diameter quæcunque, & C D vna ex ordinatim ad ipſam à ſectione ductis in quocunque angulo A C D dato. Oportet circa eiuſmodi datas A B, C D ellipſim in eodem plano per puncta deſcribere.

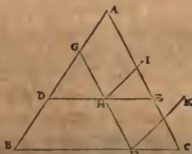
Quadrato C D æquale ponatur rectangulum B C E: iunctæque A E & productæ occurrat in F ducta B F ipſi C D parallela: tum ſumptis in A B quotlibet alijs G, H, &c. punctis, ductiſque totidem G I, H L parallelis, fiant ſingulis B G I, B H L rectangulis æqualia ſingula G K, H M quadrata. Erunt, ex 3 huius,

propter triangulum F A F recta A B bifariam diuisum, puncta M, K, D in eadem ellipsi cuius sit A B transuersa diameter, & B F contigua parameter, ideoque & specie nota. Quare si eadem A, M, K, D, B, & reliqua eiusmodi inuenta puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipsis quæsita in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

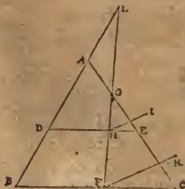
AD GENERALEM METHODVM II.

THEOR. IIII. PROP. VII.

Si sit triangulum quodlibet B A C linea D E basi B C æquidistante sectum, quod rursus linea F G ad basim quomodocunque inclinata, siue etiam perpendiculari, parallelamque D E secante in H, diuidatur: rectæque F G à puncto sectionis H quomodocunque applicetur H I, cuius quadratum sit rectangulo D H E æquale: Dico punctum I esse in coni sectione cuius sit diameter G F, & vertex G.



Ducatur à puncto F ipsi H I æquidistans F K, cuius quadratum sit rectangulo BFC æquale: sitque primùm F G alterutri laterum trianguli A B C, vt A B, æquidistans. Sunt igitur æquales inuicem rectæ F C, H E: ideoque vt B F ad D H, ita erit B F C rectangulum ad rectangulum D H E: hoc est ita quadratum F K ad quadratum H I. Sed ita est etiam G F ad GH: posita igitur GF paraboles diametro, & G eiusdem vertice, erit, ex 7 primi huius, vtraque KF, IH recta à sectione ad G F diametrum ordinatim ducta. Quare & vtrumque K & I punctum in eadem erit sectione, siue parabola, cuius sit vertex G, & diameter G F.



Secet iam F G producta latus A B extra verticem in L. Igitur vt L F ad F B, ita erit L H ad H D: & vt G F ad F C, ita erit G H ad H E: quare, componendo, vt LFG rectangulum ad B F C rectangulum, hoc est ad F K quadratum, ita erit L H G rectangulum ad D H E rectangulum: siue ad HI quadratum: & permutatim. Quare, posita G F hyperboles intercepta diametro, & G L eiusdem transuersa, erit, ex 8 primi huius, vtraque K F,

IH à ſectione ad GF diametrum ordinatim applicata. Vtrumque igitur K & I punctum in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, cuius ſit diameter GF, & vertex G.

Secet denique GF producta latus AB infra baſim, vt in L. Erit ſimiliter vt LF ad FB, ita LH ad HD: & vt GF ad FC, ita erit GH ad HE: quare, componendo, vt LFG rectangulum ad BFC rectangulum, hoc eſt ad FK quadratum, ita erit LHG rectangulum ad rectangulum DHE, hoc eſt ad HI quadratum: & permutatim: Poſita igitur GL tranſuerſa ellipſeos diametro, erit, ex eadem 8 primi huius, vtraque KF, IH à ſectione ad ipſam ordinatim applicata. Quare & vtrumque K & I punctum in eadem ellipſi erit cuius ſit LG tranſuerſa diameter, ideoque & vertex vterque L, G. Vtrouis igitur caſu punctum I in coni ſectione conſiſtit. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS II.

PROBL. IIII. PROP. VIII.

Circa datam diametrum & baſim figuram parabola contentam in plano per puncta deſcribere.

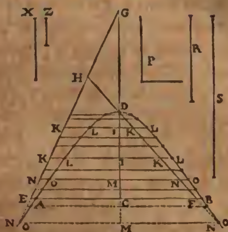
Sit data quæſitæ figuræ diameter R, baſis S, angulusque inclinationis ad inuicem æqualis Z.

Expoſita recta AB baſi S æqualis bifariam ſecetur in C: educaturque CD æqualis diametro R, facienſque angulum BCD dato Z angulo æqualem: iunctæque BD & productæ occurrat in E ducta AE ipſi CD parallela: tum ſumptis in CD quotlibet punctis F, I, M, per eadem parallelæ totidem agantur FG, IK, MN ipſis EB, EA occurrentes in G, K, N: & ſingulis GFG, KIK, NMN rectangulis ſingula fiant æqualia reſpondentia quadrata FH, IL, MO. Erunt, ex antecedente, propter triangulum AEB recta CD ipſi AE æquidiſtante diuiſum, puncta O, L, H, & reliqua huiuſmodi inuenta in eadem parabola cuius ſit diameter DC, & vertex D. Quare ſi æquabili manus ductu A, D, O, L, H, B puncta curua iungantur linea; erit illa parabolæ portio: ideoque & quæſita ADB figura erit in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. V.

PROBL. V. PROP. IX.

Circa datam diametrum & basim figuram hyperbola specie nota contentam in plano per puncta describere.

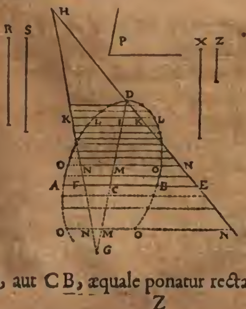


Sit data quæsitæ figuræ diameter R, basis S, angulusque inclinationis ad inuicem æqualis P. Species autem sectionis sit transuersæ diametri ad contiguam parametrum ratio eadem, quæ X ad Z.

Exposita recta AB basi S æqualis bifariam secetur in C: educaturque CD æqualis R, faciensque BCD angulum æqualem dato P angulo: tum facta CE æquali CD, quadrato AC, vel CB, æquale ponatur rectangulum ECF: & vt Z ad X, ita fiat FC ad CG: iunctæque EG occurrat iuncta FD in H: sumptisque in CD quotlibet punctis M, I, per eadem totidem ipsi AB parallelæ agantur MN, IK occurrentes HE & HF in N & K: singulisque NMN, KIK rectangulis singula ponantur æqualia respondentia quadrata MO, IL. Erunt, ex 7 huius, propter EHF triangulum recta CD diuisum, puncta L, O in eadem hyperbola cuius sit vertex D, & transuersa diameter DG se ad contiguam parametrum habens, vt X ad Z, vel vt GC ad CF: hoc est, vt vt GCD rectangulum ad DCF rectangulum, siue CB quadratum. Quare si æquabili manus ductu puncta A, D, L, O, B curua iungantur linea; erit illa hyperbolæ specie notæ portio: ideoque & quæsita ADB figura per puncta in plano descripta. Quod facere oportebat.

PROBL. VI. PROP. X.

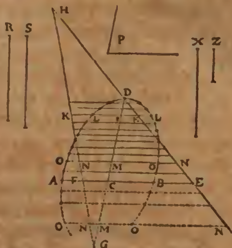
Circa datam diametrum & basim figuram ellipsi specie nota contentam per puncta in plano describere.



Sit data quæsitæ figuræ diameter R, basis S, angulusque inclinationis ad inuicem æqualis P. Species autem sectionis sit transuersę diametri ad contiguam parametrum ratio eadem quæ X ad Z.

Exposita recta AB basi S æqualis bifariam secetur in C: educaturque CD æqualis diametro R, quæ faciat angulum BCD dato P angulo æqualem: tum facta CE æquali CD, quadrato AC, aut CB, æquale ponatur rectan-

gulum ECF: & vt Z ad X, ita ſit FC ad CG: iunctæque & productæ GF occurrat iuncta & producta ED in H: tum ſumptis in DC quotlibet punctis M, I, per eadem totidem ipſi AB parallelæ agantur MN, IK ipſis HE, HF rectis occurrentes in N & K: ſingulisque NMN, KIK rectangulis ſingula ponantur æqualia reſpondentia quadrata MO, IL. Erunt, ex 7 huius, propter FHE triangulum recta CD diuiſum, puncta L, O in eadem ellipſi cuius ſit DG tranſuerſa diameter ſe ad contiguam parametrum habens, vt X ad Z, ſiue vt GC ad CF: hoc eſt vt GCD rectangulum ad DCF rectangulum, ſiue CB quadratum. Quare ſi æquabili manus ductu puncta A, D, L, O, B, G, & reliqua eiuſmodi inuenta curua iungantur linea; erit illa ellipſis ſpecie nota: ideoque & quæſita ADB figura per puncta in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

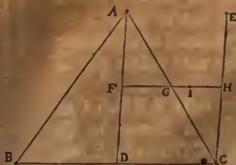


AD GENERALEM METHODVM III.

Theor. V. Prop. XI.

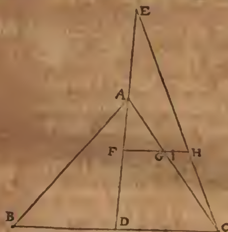
Si ſit triangulum quodcunque BAC cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ductaque AD æquidiſtans & æqualis ab alterutro B, aut C, termino ducatur CE: & ſumpto in AD quolibet puncto F, ducatur ipſi BC parallela FGH ſecans AC in G, & occurrens EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum FI: Dico puncta B, A, I, C in eadem eſſe parabola.

Hoc autem patet ex 1. huius. Quoniam FH æquatur DC: ideoque & rectangulum HFG rectangulo CD, FG eſt æquale. Quare & hîc etiam erit punctum I in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. VI. PROP. XII.

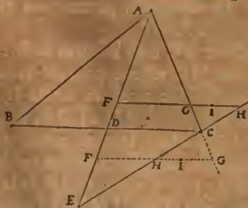
Si ſit triangulum quodcunque BAC cuius baſis BC bifariam ſit ſecta in D: iunctaque AD & producta verſus A quantumlibet in E, ducatur EC: & ſumpto in AD quolibet puncto F, ducatur FG parallela DC occurrens EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum FI: Dico puncta B, A, I, C in eadem eſſe hyperbola ſpecie nota.



Quoniam enim vt DC ad FH, ita eſt ED ad EF: & vt DC ad FG, ita eſt AD ad AF: erit, componendo, vt DC, vel DB, quadratum ad GFH rectangulum, hoc eſt FI quadratum, ita EDA rectangulum ad EFA rectangulum. Poſita igitur AE tranſuerſa hyperboles diametro, erit vtraque CD, IF, per 8 primi huius, à ſectione ad AD diametrum ordinatim ducta. Quare & punctum I in eadem erit hyperbola quæ per puncta B, A, C tranſit, cuius tranſuerſæ AE diametri ad contiguam parametrum ratio eadem erit quæ rectanguli EDA ad quadratum DC. Sunt igitur puncta B, A, I, C in eadem hyperbola ſpecie nota. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. VII. PROP. XIII.

Si ſit triangulum quodcunque BAC cuius baſis BC ſecta ſit bifariàm in D: ductaque AD & producta quantumlibet in E, iungatur EC, & producatur: ſumptoque in AE quolibet alio puncto F, ducatur FG parallela DC, occurrens AC, vbi opus productæ, in G, & ipſi EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum FI: Dico puncta B, A, I, C, E eſſe in eadem ellipſi ſpecie nota.



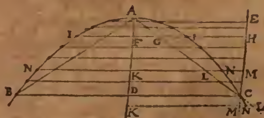
Quoniam enim vt AD ad AF, ita eſt DC ad FG: & vt DE ad FE, ita eſt DC ad FH: erit, componendo, vt ADE rectangulum ad AFE rectangulum, ita DC quadratum ad GFH rectangulum, hoc eſt FI quadratum: & permutatim. Quare poſita AE tranſuerſa ellipſeos diametro, erit vtraque CD, IF à ſectione ad AE diametrum ordinatim ducta, per 8 primi

huius. Punctum igitur I in eadem erit ellipſi quæ per puncta B, A, C, E tranſit, cuius A E tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum ratio erit eadem quæ A D E rectanguli ad D C quadratum. Quare & puncta B, A, I, C, E in eadem erunt ellipſi ſpecie nota. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS III.

PROBL. VII. PROP. XIIII.

Circa datum quodcunque triangulum parabolam in plano per puncta deſcribere.

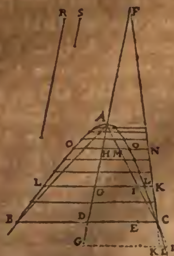


Sit datum B A C triangulum circa quod oporteat parabolam per puncta deſcribere.

Secetur B C bifariam in D: ductæque A D fiat parallela & æqualis C E: ſumptiſque in A D quotlibet F, K punctis, per eadem totidem agantur ipſi B C parallelæ F G H, K L M: ſinguliſque G F H, L K M rectangulis ſingula ponantur reſpondentia F I, K N quadrata. Palam eſt, ex 11 huius, puncta I, N, & reliqua huiuſmodi inuenta, in eadem eſſe parabola quæ per B, A, C tranſit. Quare ſi eadem curua æquabili manus ductu iungantur linea; erit illa parabola in plano circa B A C triangulum per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. VIII. PROP. XV.

Circa datum quodcunque triangulum hyperbolam ſpecie notam in plano per puncta deſcribere.



Sit datum B A C triangulum, circa quod oporteat hyperbolam deſcribere. Species autem ſectionis ſit tranſuerſę diametri ad contiguam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secetur B C baſis bifariam in D: & quadrato D C æquale ponatur rectangulum A D E: producta autem D A, fiat vt S ad R, ita E D ad D F: iungaturque C F: tum ſumptis quotlibet in A D punctis G, H, per eadem totidem parallelæ ipſi D C agantur G I K, H M N: ſinguliſque I G K, M H N rectangulis ſingula fiant æqualia reſpondentia quadrata G L, H O. Erunt ex 12 huius,

huius, puncta O & L in eadem hyperbola quæ per puncta B, A, C transit, cuius transuersa erit diameter F A ad contiguam parametrum se habens vt R ad S, siue vt F D ad D E: hoc est vt F D A rectangulum ad A D E rectangulum, vel D C quadratum. Quare si eadem B, A, O, L, C, & reliqua eiusmodi inuenta puncta curua iungantur linea; erit illa hyperbola specie nota in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

PROBL. IX. PROP. XVI.

Circa datum quodcunque triangulum ellipsim specie notam in plano per puncta describere.

Sit datum B A C triangulum, circa quod oporteat ellipsim describere, cuius species sit transuersæ diametri ad contiguam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secta basi B C bifariam in D, ductaque A D, quadrato D C æquale ponatur rectangulum A D E: & vt S ad R, ita, producta A D, fiat E D ad D F: iunctaque F C, & producta, sumantur in A F quotlibet alia, præter D, puncta G, H: & per eadem totidem ipsi D C parallelæ agantur G I K, H M N ipsi F C occurrentes in K, & N: & ipsi A C, vbi opus productæ, in I, & M: singulisque I G K, M H N rectangulis singula fiant æqualia respondentia G L, H O quadrata. Erunt, ex 13 huius, puncta O, L in eadem ellipsi quæ per puncta F, B, A, C transit, cuius erit transuersa diameter A F se ad contiguam parametrum habens vt R ad S, hoc est vt F D ad D E: siue vt F D A rectangulum ad A D E rectangulum, vel D C quadratum. Quare si eadem B, A, O, L, C, F, & reliqua huiusmodi inuenta puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipsis specie nota in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

MONITVM.

Non te moueat, Lector, si præcedentibus methodis sequentem aliquantò operosiorem hîc adnectimus, è duobus proximè præmittendis theorematibus deductam. E re tua maximè est illam non omisisse: at certè digna nobis visa est quæ apponeretur. Quandoquidem primo omnibus coni sectionibus in plano per puncta describendis æquè communicat, vt inibi patebit. Sed præsertim (quod in ea magna & speciali notatione dignum tibi videri debet) quoniam, si penitius introspicias, vniuscuiusque coni sectionis non solùm

in plano descriptæ ortum & generationem, sed & describendæ methodum aperit, & propriam cuiusque naturam consequitur: ita vt mechanicam maximè vrgeat, & excitet: facilemque organicam constructionem, & propriam vnicuique sectioni, in plano præsertim per fila lineandæ, instrumenti fabricam digito quamproximè monstret. Atque etiam hinc vmbilicorum nomen passim iam à nobis vsurpatum deinceps manifestò se prodit. Non te igitur pœniteat interim duo præmittenda theoremata, quibus sequentes binæ etiam generales methodi innituntur, attentiùs reuisisse. Magnum haud dubiè sub eis latet mysterium: magnus ad specularia & dioptricem thesaurus eorum ope olim suo loco proponetur eruendus.

AD GENERALEM METHODVM IIII.

THEOR. VIII. PROP. XVII.

Si sit triangulum quodcunque ABC rectangulum ad B: sectæque AC bifariam in D perpendicularis excitetur DE, cui à puncto C ducta CE ipsi AB parallela occurrat in E: seceturque AB bifariam in F: Dico punctum E esse in eadem parabola cuius vertex sit F, & vmbilicus A.



Producta enim ED in G, & ducta FD in H, à puncto E ducatur EI parallela BC. Igitur, propter æquales AD, DC, itemque BF, FA, & parallelas AB, CE, erit FH parallela BC, & recta FD rectæ DH æqualis. Sunt autem & anguli ad H, & F recti: quare & HE, hoc est FI, erit æqualis FG. Sed, propter vtrumque ad D & F angulum rectum, quadratum FD æquale est AFG, hoc est IFA, rectangulo: igitur quadruplum FD quadratum, hoc est IE quadratum, æquale erit rectangulo sub IF & quadrupla FA. Existente igitur A vmbilico paraboles, & eiusdem vertice F; erit quadrupla FA rectæ parametro æqualis: ideoque & EI à sectione ad axem ordinatim, ex 10 primi huius, erit applicata. Quare & punctum E erit in eadem sectione. Quod erat demonstrandum.

THEOR. IX. PROP. XVIII.

Si sit triangulum quodcunque ABC non rectangulum ad C: factaque BG æquali BC, secetur GA bifariam in H:

& ſectæ A C bifariam in E erigatur perpendicularis E F quæ occurrat lateri B C in F: Dico punctum F eſſe in hyperbola, aut ellipſi, cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H.

Secetur A B bifariam in D. Quoniam igitur & A G ſecta eſt bifariam in H: erit D H dimidiæ inter vtramque A G, A B differentiæ, hoc eſt dimidio B G æqualis. Eſt autem B G æqualis B C: quare ſumpta H I dupla D H erit ipſi B C æqualis. Propter æquales autem A E, E C, & perpendicularem E F, ducta A F erit æqualis F C: ſi quidem igitur angulus C eſt obtuſus, ſuperabit B F rectam A F, hoc eſt C F, quantitate rectæ B C, hoc eſt H I. Sin autem angulus C eſt acutus, erunt B F, F A ſimul ipſi B C, hoc eſt rectæ H I, æquales. Poſitis igitur hyperboles, vel ellipſeos, axe tranſuerſo H I, & vmbilicis A, B; erunt, ex 51 primi huius, rectæ A F, B F ab vtroque vmbilico ad idem ſectionis punctum F inclinatæ. Quare & punctum F in eadem erit ſectione cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS IIII.

PROBL. X. PROP. XIX.

Datis, poſitione, paraboles vmbilico, & vertice; parabolem in eodem plano per puncta deſcribere.

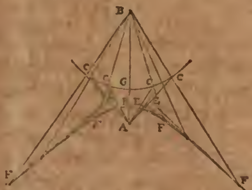
Sit datus A paraboles vmbilicus, eiuſque vertex F.

Iuncta A F producatur in B, vt ſit F B æqualis A F: & à punctis F & B ipſi A B perpendiculares excitentur F D, B C productæ quantum opus erit: ductis autem à puncto A quotcunque rectis, vt A C, ſecantibus rectam F D, vt in D, perpendiculares totidem ijſdem erigantur, vt D E, occurrentes ductis à punctis C ipſi A B parallelis, vt C E, in E. Palam igitur eſt, ex 17 huius, inuenta eiuſmodi puncta, vt E, in eadem eſſe parabola cuius ſit vertex F, & vmbilicus in A.

Quare si eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabola in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XI. PROP. XX.

Datis, positione, hyperboles vmbilicis, & vertice; hyperbolem in eodem plano per puncta describere.



Sint dati hyperboles vmbilici A, B, vertexque H: iuncta AB transibit vtique per H.

Sumatur igitur HG æqualis AH: & centro B, interuallo BG, describatur circuli circumferentiæ portio GC quam à puncto B eductæ quotcunque rectæ, vt BF, secent in C, eiusmodi vt à puncto A ad singula in GC puncta totidem rectæ ductæ, vt AC, angulum faciant ACB recto maiorem: quibus bifariam sectis, vt in E, perpendiculares excitentur, vt EF, occurrentes rectis respondentibus à puncto B eductis, vt BCF, in F. Erunt, propter triangulum ABC obtusiangulum ad C, huiusmodi inuenta puncta omnia, vt F, ex 18 huius, in eadem hyperbola cuius erunt vmbilici A, B, & vertex H. Quare si eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbola in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XII. PROP. XXI.

Datis, positione, ellipseos vmbilicis, & alterutro vertice; ellipsim in eodem plano per puncta describere.



Sint dati ellipseos vmbilici A, B, vertexque alteruter H: producta igitur BA transibit per H.

Sumatur in AB producta recta HG æqualis AH: & centro B, interuallo BG, describatur arcus, vel etiam integra circuli circumferentia GC, ad quam à puncto B quotcunque rectæ educantur, vt BC: iunctisque AC, & bifariam sectis in E: perpendiculares excitentur, vt EF, ipsis BC

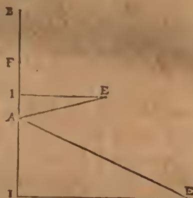
B C reſpondentibus rectis occurrentes in F. Erunt, ex 18 huius, propter triangulum A B C acutiangulum ad C, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt F, in eadem ellipſi cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quare ſi eadem æquabili manu curua iungantur linea; erit illa ellipſis in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

AD GENERALEM METHODVM V.

THEOR. X. PROP. XXII.

Si ſit data quæcunque recta linea A B bifariam diuiſa in F: & ſumpto in F A, vel in ipſa producta, quolibet alio puncto I, excitetur perpendicularis I E eiuſmodi, vt ducta A E ſit æqualis B I: erit punctum E in eadem parabola cuius ſit vmbilicus A, & vertex F.

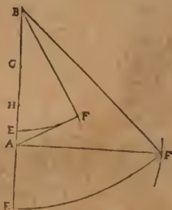
Hoc autem facilè patet ex 17 huius, vbi propter æquales A D, D C, & perpendicularem D E, recta A E rectæ C E, hoc eſt B I, vt hîc, eſt æqualis: & punctum E in eadem parabola vmbilico A, & vertice F deſcripta oſtenſum eſt. Attamen & hoc aliter ſic demonſtrabimus.



Sit enim primùm punctum I intra puncta A & F; erit quadratum B I æquale duobus B F, hoc eſt A F, & F I quadratis vnà cum duplo B F I, hoc eſt A F I, rectangulo. Sed quadrato A F æqualia ſunt bina A F I, F I A rectangula vnà cum quadrato I A, quorum F I A rectangulo vnà cum quadrato F I æquale eſt A F I rectangulum: igitur quadratum B I, hoc eſt A E quadratum, æquale eſt quadruplo A F I rectangulo vnà cum quadrato I A. Ablato igitur vtrinque I A quadrato, erit reliquum E I quadratum reliquo quadruplo A F I, hoc eſt I F in quadruplam F A, rectangulo æquale. Exiſtente autem puncto I in F A producta; erit rurſus quadratum B I duobus B F, hoc eſt A F, & F I quadratis vnà cum duplo B F I, hoc eſt A F I, rectangulo. Sed quadrato F I æqualia ſunt ambo A F I, F A I rectangula vnà cum quadrato A I, quorum F A I rectangulo vnà cum quadrato A F æquale eſt rectangulum A F I: quadratum igitur B I, hoc eſt A E, rurſus quadruplo A F I rectangulo vnà cum quadrato A I eſt æquale. Ablato igitur vtrinque quadrato A I, erit reliquum I E quadratum reliquo quadruplo A F I rectangulo æquale. Quare, vtrouis caſu, poſita A F axis portione vertice paraboles & vmbilico intercepta, erit quadrupla A F rectæ parametro æqualis, ideoque & recta E I, per 10 primi huius, à ſectione ad axem ordinatim ducta. Punctum igitur E erit in eadem ſectione ſiue parabola cuius ſit vmbilicus A, & vertex F. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XI. PROP. XXIII.

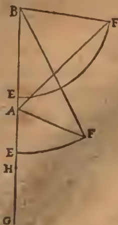
Si ſit data quæcunque recta linea A B ſecta non bifariam in H: ſitque A H minor quàm H B, & ipſi æqualis ponatur H G: ſumpto autem in H A, vel in ipſa producta, quolibet puncto E, deſcriptum centro B, interuallo B E, circuli arcum E F ſecet in F deſcriptus centro A, interuallo E G, arcus: erit punctum F in eadem hyperbola cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H.



Ductis enim A F, B F: quoniam B F æquatur E B, & A F æquatur E G, ſuperat B F rectam A F quantitate rectæ B G. Poſitis igitur A, B hyperboles vmbilicis, & vertice H, erit, propter æquales H A, H G, reliqua B G eiuſdem hyperboles axi tranſuerſo æqualis. Quare B F recta rectam A F quantitate axis tranſuerſi ſuperabit. Et propterea, ex demonſtratis in 51 primi huius, rectæ A F, B F ab vtroque vmbilico ad idem ſectionis punctum oſtendentur inclinatæ. Quare & F punctum in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XII. PROP. XXIIII.

Si ſit data recta linea quæcunque A B producta in H: & ipſi A H æqualis in directum apponatur H G: ſumptoque quolibet interuallo B E, maiori quidem quam A H, minori verò quàm B H, deſcribatur circuli arcus E F quem centro A, interuallo E G, deſcriptus arcus ſecet in F: erit punctum F in eadem ellipſi cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H.



Ductis enim A F, B F: quoniam B F æquatur B E, & A F æquatur E G, erunt rectæ A F, B F ſimul rectæ B G æquales. Poſitis igitur A, B ellipſeos vmbilicis, & vertice H, erit, propter æquales H A, H G, compoſita recta B G eiuſdem ellipſeos axi tranſuerſo æqualis: quare & ambæ A F, B F ſimul eidem tranſuerſo axi erunt æquales: ideoque & per demonſtrata in 51 primi huius, eædem A F, B F rectæ ab vtroque ellipſeos vmbilico ad idem ſectionis punctum oſtendetur inclinatæ. Quare & punctum F in eadem erit ſectione, ſiue

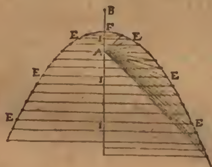
ellipsi, cuius sint vmbilici A, B, & vertex H. Quod erat demonstrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS V.

PROBL. XIII. PROP. XXV.

Datis, positione, paraboles vmbilico, & vertice; parabolem per puncta quotlibet in eodem plano promptè describere.

Sit A datus paraboles vmbilicus, & F eiusdem vertex.



Iuncta A F producatur ad B, vt sit F B æqualis A F, & ad partes A producatur quantùm opus. Axis igitur paraboles erit F A. Sumptis itaque in F A quotlibet punctis, vt I, excitentur totidem ipsi F A perpendiculares, vt I E, quas centro A, interuallo quo vnaquæque distat à B, vt B I, descripti arcus secent, vt in E: erunt, vt in 22 huius, puncta huiusmodi, vt E, in eadem parabola cuius sit vmbilicus A, & vertex F. Quare si eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabola in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XIIII. PROP. XXVI.

Datis, positione, hyperboles vmbilicis, & vertice; hyperbolem in eodem plano per puncta quotlibet promptè describere.

Sint dati hyperboles vmbilici A, B, & H vertex.

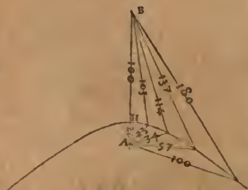


Iuncta igitur A B transibit per H. Ponatur itaque H G æqualis H A: & in ipsa H A, etiam si opus producta, sumantur quotlibet puncta, vt E, per quæ centro B describantur arcus totidem, vt E F, quos centro A, interuallo quo vnumquodque respondens punctum ab ipso G puncto distat, vt E G, descripti arcus etiam totidem secent, vt in F: erunt, vt in 23 huius, eiusmodi inuenta intersectionum puncta omnia, vt F, in eadem hyperbola cuius erunt

vmbilici A, B, & vertex H. Quare si eadem puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæsita in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM I.

Nonnunquam fortè compendiosum fuerit in numeris hoc problema experiri: hac ratione.



Sint dati A, B vmbilici, & H hyperboles vertex: sitque ratio BH ad HA in numeris data, vt 100 *ad* 20: *erit ambarum differentia* 80 *numerus axi transuerso debitus. Quare si arcum centro A interuallo* 23 *partium descriptum secet arcus centro B interuallo partium* 103 *descriptus: similiter & descriptos arcus interuallis* 34, 57, 100, *aut quotlibet plurium partium secent arcus centro B, & radijs* 114, 137, 180, *aut respondentium pari excessu, supra* 100 *&* 20, *partium descripti; erunt intersectionum puncta omnia in eadem hyperbola quæsita æquabili manus ductu per eadem describenda.*

COMPEND. II.

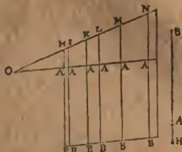
Sed non data sit ratio BH ad HA in numeris. Sumpta ambarum differentia pro axe transuerso sectionis, æstimabitur HA, vel etiam axis, quotlibet partium: & facto æquali vtrinque incremento, per arcum ab vtroque vmbilico descriptorum intersectiones dabuntur puncta per quæ quæsita hyperbola describenda erit.

COMPEND. III.

Absque numeris etiam hæc postrema ratio satis compendiosa erit qua hyperboles axis etiam manebit indiuisus.

Sint dati, vt supra, vmbilici A, B, sectionisque vertex H. Exponatur seorsim eadem recta BH, in qua sumatur & HA datæ æqualis: ductæque AO quomodocunque, & ad partes A productæ,

productæ, occurrat in O recta quæpiam HO quæ & ad partes H producatur: eidemque OA æquidistans per B ducatur BB: ductis iam quocunque interuallo rectis ipsi BH æquidistantibus, erunt rectæ lineis OH & OA productis interceptæ, vt AI, AK, AL,



AM, &c. Interualla arcuum citimo vmbilico A describendorum arcus vmbilico B & interuallis BI, BK, BL, BM, &c. descriptos intersecantium. Quorumquidem arcuum intersectiones erunt ipsa L, K, M, &c. puncta viam quæsitæ hyperbolæ ducendæ designantia. Quod è supra demonstratis facile constat. Quare & problemati hac ratione satisfactum erit.

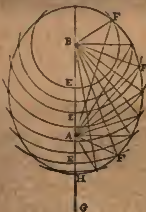


PROBL. XV. PROP. XXVII.

Datis, positione, ellipseos vmbilicis, & vertice alterutro; ellipsim in eodem plano per puncta quotlibet describere.

Sint dati vmbilici A, B, & H ellipseos vertex.

Iuncta igitur AB & producta transibit per H. Poducatur: & ipsi AH æqualis in directum apponatur HG centroque B & interuallis quibuscunque, majoribus tamen quam AH, & minoribus quam BH, vt BE, describantur arcus, vt EF, quos interuallo quo vnusquisque à puncto G distat, vt GE, alij arcus descripti secent, vt in F: erunt, ex 24 huius, intersectionum puncta omnia, vt F, in eadem ellipsi cuius erunt vmbilici A, B, & vertex H. Quare si æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipsis quæsita in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.



COMPENDIVM I.

Habet sua compendia hæc methodus pro ellipsi describenda.

Sint dati ellipſeos deſcribendæ vmbilici A, B, & vertex vterque H, D. Dataque ſit primùm ratio HA ad AB, nempe 16 ad 100: erit igitur axis tranſuerſus partium 132. Quare ſi arcus centro B, interuallis 110, 97, 81, & aliarum ſupra 16, & infra 116, partium deſcriptos ſecent alij centro A interuallis 22, 35, 51, aut aliarum reſpondentium ad numerum 132 reſiduarum partium, arcus deſcripti: erunt interſectionum puncta in quæſita ellipſi per eadem deſcribenda.

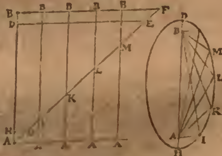


Non ſit autem data ratio HA ad AB in numeris. Nihilominus ſi poſito ellipſeos deſcribendæ axe 100, aut quotlibet partium, arcus hinc inde ab vmbilicis deſcribantur ſub interuallis partium ſimul aſſumpto numero æqualium: hac tamen cautione vt vtrumque interuallum ſigillatim excedat HA, & a BH deficiat; erunt eadem ratione arcuum interſectiones in quæſita ellipſi per eaſdem delineanda.

COMPEND. II.

Abſque numeris etiam hac methodo compendioſè ellipſis per puncta deſcribetur manente eiuſdem axe indiuiſo.

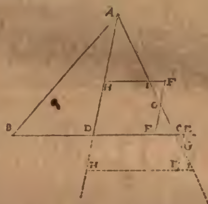
Sint dati, vt ſupra, vmbilici A, B, & axis HD. Exponatur ſeorſim recta AB æqualis HD: ductaque quomodocunque per B recta BB, ducatur per A ipſi æquidiſtans recta AA: interque ipſas incidat quomodocunque recta AF: tum ſumptis in AB recta duobus D & H punctis eiuſmodi vt BD, HA ſint datis æquales: ipſis AA, BB rectis æquidiſtantes ducentur rectæ DE, HG occurrentes rectæ AF in G & E: ſumenturque in EG quotlibet puncta, vt I, K, L, M, &c. per quæ æquidiſtantes ipſi AB ducentur BIA, BKA, BLA, BMA, &c. quarum partes ad B interualla erunt arcuum vmbilico B deſcribendorum; & partes ad A radij erunt arcuum ex vmbilico A priores interſecantium: vt appoſita figura fit manifeſtum. Quare & hac etiam ratione problemati ſatisfiet.



Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XIII. PROP. XXVIII.

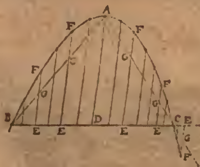
Si ſit triangulum quodcunque BAC, eiuſque baſis BC ſecta ſit bifariam in D: atque in BD, aut DC, vel etiam in ipſis productis, ſumatur quodcunque punctum E, à quo ductæ AD parallela educatur EF ſecans AB, aut AC, ſi opus eſt productas, in puncto G: & vt BD ad DE, ita fiat EG ad GF: erit punctum F in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.



Ducta enim FH parallela BC quæ ſecet AC, aut AB, in I: erit vt BD, vel DC, ad ED, vel FH, ita EG ad GF: & ita EC ad FI: quare & ita erit reliqua, vel compoſita, ED, hoc eſt FH, ad reliquam, ſiue compoſitam, IH. Quare, ex 1 huius, erit punctum F in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XVI. PROP. XXIX.

Circa datum quodcunque triangulum parabolam in plano per puncta deſcribere.



Sit datum BAC triangulum.

Secetur baſis BC bifariam in D: ductæque AD à quotlibet ſumptis in BD, vel DC, punctis E, æquidiſtantes totidem educantur EG ſecantes AB, vel AC, in G: & vt BD ad DE ita fiat EG ad GF. Palam eſt, ex antecedente, eiuſmodi inuenta puncta omnia, vt F, in eadem fore parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabola circa triangulum BAC per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

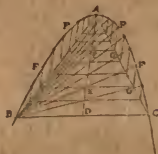
Commodum fortè & compendioſum fuerit, ſi componendo, vt

BD ad BE, ita fiat EG ad EF: ne breuior alioquin GF nonnunquam ſenſum fugiat.

Aliter, & ad Mechanicam aptius.

PROBL. XVII. PROP. XXX.

Circa datum triangulum parabolam in eodem plano per puncta deſcribere.



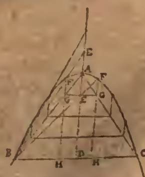
Sit datum BAC triangulum.

Secta baſi BC bifariam in D: in ducta AD ſumantur quotlibet puncta E, per quæ baſi BC parallelæ totidem ducantur EG ipſis AB, AC occurrentes in G: tum ductis à puncto B per ſingula in AD puncta rectis BE, occurrant in F ductæ per G ipſi AD parallelæ GF: erunt, vt in antecedente, ex 28 huius, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt F, in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit: quare & per eadem continuata circa BAC triangulum erit deſcrîpta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

Compendioſum ſatis erit, ſi diuiſa AD in quotlibet partes æquales, in totidem æquales diuidatur vtraque BD, DC. Namque eductis à ſingulis in BD, & DC punctis ipſi AD parallelis, ſi ab vtroque B & C puncto per ſingula reſpondentia in A, D puncta ductæ rectæ occurrant in F; erunt occurſuum puncta F, vt ſupra, in eadem parabola quæ per B, A, C tranſit.

Sed nec omittendum videtur, ſi in producta AD verſus A ſumantur partes factis in AD partibus æquales: & ab vnico B, aut C, puncto ad ipſarum ſingulas ductæ lineæ reſpondentibus eductis ipſi AD parallelis occurrant; etiam occurſuum puncta fore in eadem parabola quæ per B, A, C tranſit. Producta enim vtraque FG in H, erit vtrinque DE, ſiue HG, ad HF, veluti BD ad BH: vt in anteced. comp.



PROBL. XVIII.

PROBL. XVIII. PROP. XXXI.

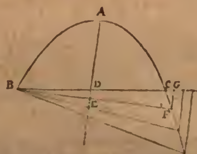
Parabolæ portionem per puncta quotlibet vlteriùs producere.

Sit parabolæ portio B A C quam oporteat vlteriùs verſus C producere.



Iungatur B C, & bifariam ſecetur in D: ductaque & producta diametro A D, iungatur A C, & producatur: tum ſumptis in A D producta quotlibet punctis, vt E, ducantur totidem ipſi B C parallelæ E G occurrentes productæ A C in G: & ductis per B, & per ſingula ſumpta in A D producta puncta, rectis B E occurrant ductæ à ſingulis in A C producta punctis G rectæ G F: erunt occurſuum puncta omnia, vt F, in eadem B A C parabola. Hoc enim ex 28 huius etiam facilè conſtat. Quare ſi huiuſmodi inuenta puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit per eadem parabolæ B A C portio continuata. Quod facere oportebat.

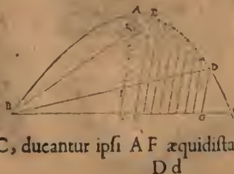
COMPENDIVM.



Magis compendioſa fortè videbitur methodus hac ratione. Diuiſa nempè vtraque A D, D C in totidem partes æquales, ſumantur in producta B C quotlibet partes ipſius D C: atque etiam in producta A D totidem ipſius partes: ductiſque à puncto B per ſingula in A D producta ſignata puncta rectis, vt B E, occurrant à reſpondentibus in D C producta punctis ipſi A D parallelæ ductæ, vt G F, in F: namque, ex ſupra oſtenſis, erunt eiuſmodi puncta, vt F, in eadem parabola quæ per B, A, C tranſit.

PROBL. XIX. PROP. XXXII.

Datæ parabolæ mutilæ hiatum per quotlibet intermedia puncta reſarcire.



Sit propoſita B A C parabola mutila portione D E quam oporteat per puncta quotlibet reſtituere.

Ducatur diameter quæcunque A F: & ad ipſam à quocunque, vt B, puncto ordinatim ducta B F C, ducantur ipſi A F æquidiſtantes

EH, DG: iunctæ autem BE, BD ſecent ipſam AF in K & I: diuiſa igitur GH in quotlibet partes æquales, in totidem æquales etiam ſecetur IK: atque eductis à ſingulis in G, H punctis ipſi AF parallelis occurrant à puncto B per ſingula in I, K reſpondenti puncta ductæ lineæ: erunt occurſuum puncta in continuata BAC parabola. Illud enim ducta AC à parallelis ſecta eodem modo quo ſupra demonſtrabitur. Quare per inuenta huiuſmodi puncta continuata ſectio hiatu carebit. Quod erat propoſitum.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XIIII. PROP. XXXIII.

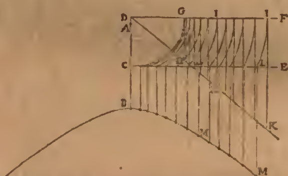
Si ſit triangulum quodcunque BAC rectangulum ad B: & à quolibet in AB ſumpto puncto D erigatur perpendicularis DE occurrens AC in E: atque à puncto A erigatur perpendicularis AF æqualis AD, & producatur in G, vt ſit FG æqualis DE: ſumptoque in DB, vel etiam in ipſa producta, quolibet puncto H, erigatur perpendicularis HI occurrens AC in I: & centro A, interuallo AH, deſcripta circumferentia parallelam ipſi AB à puncto F ductam ſecet in L: erigaturque perpendicularis LM, quæ ponatur æqualis HI; erit punctum M in hyperbola, cuius vertex erit G, & dupla FG axis tranſuerſus ad quem recta parameter ſe habebit, vt AB quadratum ad BC quadratum.

A puncto enim M cadat ad AG, ſi opus eſt productam, perpendicularis MN: & in FA, etiam ſi opus eſt producta, ſumatur FK æqualis FG. Quoniam igitur vt AB ad BC, ita eſt AD ad DE, hoc eſt AF ad FG: & ita AH ad HI, hoc eſt AL ad LM: erit vt AB quadratum ad BC quadratum, ita AF quadratum ad FG quadratum: & ita AL quadratum ad LM, ſiue FN, quadratum: ideoque & ita reliquum FL, ſiue MN, quadratum ad reliquum KNG rectangulum. Exiſtente autem G hyper-

boles vertice, atque G N axe intercepto, & centro F; erit K G transuersus axis: positaque eiusdem ad rectam parametrum ratione eadem quæ B C quadrati ad B A quadratum; erit, ex coroll. 2 ad 13 primi huius, perpendicularis M N à sectione ad axem ordinatim applicata. Quare punctum M in eadem erit sectione, siue hyperbola, cuius erit vertex G, & axis transuersus K G, ad quem se recta parameter habebit, vt AB quadratum ad BC quadratum. Quod erat demonstrandum.

PROBL. XX. PROP. XXXIV.

Datis hyperboles axe transuerso, & eiusdem ad rectam parametrum ratione; hyperbolem per puncta quotlibet in plano delineare.



Sit data recta AB quæsitæ hyperboles axis transuersus, eiusque ad rectam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secetur bifariam A B in C: & vt R ad S, ita fiat B C quadratum ad C D quadratum: eriganturque perpendiculares C E, D F productæ quantum opus: sumptaque D G æquali D C, erigatur perpendicularis G H æqualis A C, vel C B: iunctaque D H producatur etiam quantum opus: & sumptis in G E quotlibet punctis, vt I, erigantur totidem perpendiculares, vt I K, occurrentes C E in K: & totidem à puncto D interuallis, vt D I, centro D describantur arcus secantes C E, vt in L, vnde perpendiculares erectæ, vt LM, fiant respondentibus, vt I K, perpendicularibus æquales: erunt, ex antecedente, omnium termini, vt M, in eadem hyperbola cuius vertex erit B, & axis transuersus A B se ad rectam parametrum habens vt B C, siue H G, quadratum ad C D, siue G D, quadratum: hoc est vt R ad S. Quare si inuenta hujusmodi puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæsita in plano per puncta descripta. Quod faciendum erat.

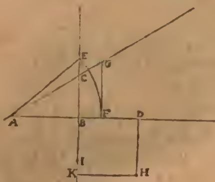
MONITVM.

Quoniam hæc methodus operosior nonnihil nobis visa est, quæ tamen ipsam quam-proximè naturam imitatur, vt vnicuique accuratius ipsam speculanti liquidò constabit: ideoque neque temerè à nobis fuit omittenda: non frustra factum iri duximus ipsam ad compendium aliquod reuocare. Itaque & ad ipsum alterum hoc sequens theorema concipietur eiusmodi.

Pro eiuſdem methodi compendio.

THEOR. XV. PROP. XXXV.

Si ſit triangulum quodcunque ABC rectangulum ad B: ſumptoque in AB producta quolibet puncto D, ponatur in BC, ſi opus eſt, producta, ipſi BD æqualis BE: & iunctæ AE æqualis ponatur AF, cui perpendicularis ſit FG occurrens productæ AC in G: & à puncto D erigatur perpendicularis DH æqualis FG; erit punctum H in hyperbola cuius ſit dupla BC axis tranſuerſus ad quem ſe recta parameter habeat vt AB quadratum ad BC quadratum.



Producatur CB in K, vt ſit BI æqualis CB: ducaturque HK æquidiſtans AB. Exiſtente igitur CI tranſuerſo hyperboles axe, erit ad ipſum perpendicularis & ordinatim ducta HK ipſi DB æqualis. Et quoniam vt AB quadratum ad BC, hoc eſt BI, quadratum, ita eſt AF, hoc eſt AE, quadratum ad FG, hoc eſt BK, quadratum: ita erit etiam & reliquum BE, hoc eſt BD ſiue KH, quadratum ad reliquum IKC rectangulum. Poſita igitur tranſuerſi axis CI ad rectam parametrum ratione eadem quæ CB quadrati ad BA quadratum, erit, vt in 33 huius, recta HK à ſectione ad axem ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit hyperbola cuius vertex erit I, & tranſuerſus axis IC ad quem ſe recta parameter habeat vt AB quadratum ad BC quadratum. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXI. PROP. XXXVI.

Datis hyperboles axe tranſuerſo, & ratione eiuſdem ad rectam parametrum; hyperbolem in plano per puncta quotlibet deſcribere.

Sit data recta AB hyperboles axis tranſuerſus, & eiuſdem ad rectam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secetur AB bifariam in C: & vt R ad S, ita ponatur BC quadratum ad CD perpendicularis quadratum: iungaturque DB & producatur: tum in producta DC ſumptis quotlibet punctis, vt E, ſingulis, vt CE, interuallis æquales totidem ſumantur rectæ, vt CF, rurſuſque ſingulis, vt DF, interuallis æqualia etiam totidem ponantur, vt DG,

vt D G, interualla: erectiſque totidem, vt G I, perpendicularibus quarum termini, vt I, ſint in recta D B producta, erigantur totidem perpendiculares, vt E H, ipſis, vt G I, perpendicularibus æquales: erunt, ex antecedente, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt H, in eadem hyperbola cuius ſit vertex B, & axis tranſuerſus A B, eiuſdemque ad rectam parametrum ratio eadem quæ B C, quadrati ad C D quadratum: hoc eſt quæ R ad S. Quare ſi eadem puncta omnia ęquabili manus ducta curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano pro puncta deſcripta. Quod faciendum erat.

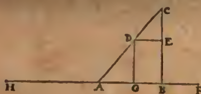


Ad ſpecialem pro ellipſi methodum.

THEOR. XVI. PROP. XXXVII.

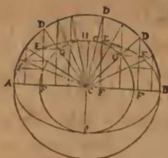
Si ſit triangulum quodcumque A B C rectangulum ad B: & à quolibet in A C puncto D ducatur DE parallela AB, ocurrenſque B C in E: productaque A B in F, fiat A F æqualis A C; erit punctum E in ellipſi cuius dupla A F erit axis maior, minorque duplæ A D æqualis.

Cadat enim perpendicularis D G: & F A producatur in H, vt ſit A H æqualis A F. Quoniam igitur vt AC, hoc eſt A F, ad C B, ita eſt A D ad D G, hoc eſt EB: &, permutando, vt A F ad A D, ita eſt C B ad EB: erit vt A F quadratum, hoc eſt H A F rectangulum, ad A D quadratum, ita C B quadratum, hoc eſt H B F rectangulum, ad B E quadratum. Poſita igitur H F ellipſeos extrema maiore diametro, & A D eiuſdem minoris dimidio æquali, & centro A, erit perpendicularis E B à ſectione ad H F maiorem axem ordinatim, ex coroll. 2 ad 13 primi huius, applicata. Quare punctum E, in eadem erit ellipſi cuius dupla A F axis erit major, & minor duplæ A D æqualis. Quod erat demonſtrandum.



PROBL. XXII. PROP. XXXVIII.

Datis ellipſeos extremis diametris; eandem in plano per puncta quotlibet deſcribere.



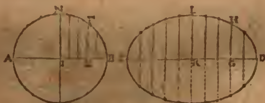
Sint datæ A B maior, & H I minor quæſitæ ellipſeos extremæ diametri, ſiue axes, bifariam ſeſe & ad rectos in C ſecantes angulos: ſin autem, ita componantur.

Centro C, interuallis C B, C H, deſcribantur circulorum circumferentiæ quas è communi C centro educti quotlibet radij, vt C D, ſecent, vt in G, & D: atque à punctis in maiori circumferentia factis, vt D, ad A B diametrum perpendiculares demittantur, vt D F, quibus à reſpondentibus in minori circumferentia punctis, vt G, ductæ ipſi A B æquidiſtantes occurrant, vt G E, in E: erunt, ex antecedente, occurſuum puncta, vt E, in eadem ellipſi quæ per puncta A, H, B, I tranſit: hoc eſt cuius erit A B axis maior, & H I axis minor. Quare ſi inuenta huiuſmodi puncta omnia curua iungantur linea æquabili manus ductu; erit illa ellipſis quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

ALITER.

PROBL. XXIII. PROP. XXXIX.

Iiſdemmet datis; ellipſim deſcribere.



Sit A B axis minor, & C D axis maior.

Circa diametrum A B deſcriptæ circuli circumferentiæ occurrant à ſingulis diuiſæ in partes æquales diametri A B punctis eductæ perpendiculares, vt I N, E F: (ſatis autem fuerit ſi à dimidia A B, hoc eſt I B, ſint eductæ) & diuiſa C D in totidem æquales partes, à ſingulis perpendiculares educantur reſpondentibus ſingulis ab A B diametro eductis, & circumferentia terminatis æquales, vt K L, G H: erunt omnium termini, vt L, H in eadem ellipſi cuius erit C D axis maior, & minor axis ipſi A B æqualis.

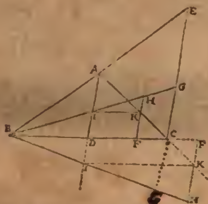
Sint enim ſectæ bifariam A B in I, & C D in K, ideoque & erecta K L æqualis A I, vel I B, hoc eſt I N: erit vt C D ad A B, ita C G ad A E: & ita G D ad E B: quare vt C D quadratum ad A B quadratum, ita erit C G D rectangulum ad A E B rectangulum. Igitur vt

CKD rectangulum ad AIB rectangulum, hoc eſt KL quadratum, ita erit CGD rectangulum ad AEB rectangulum, ſiue EF, aut GH, quadratum. Exiſtente igitur CD tranſuerſo axe erit HG perpendicularis ad ipſum à ſectione ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit ellipſi quæ per puncta C, L, D tranſit. Quare ſi inuenta huiuſmodi puncta omnia curua iungantur linea; erit illa ellipſis in plano deſcripta. Sed & datis quibuſlibet coniugatis ellipſeos diametris non aliter ellipſis per puncta deſcribetur & deſcripta oſtendetur. Quod facere oportebat.

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XVII. PROP. XL.

Si ſit triangulum quodcunque ABC, cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ductæque AD æquidiſtans ab alterutro baſis termino, vt C, educatur CE occurrens productæ BA in E: ſumptoque in DC, vel etiam in ipſa producta, quolibet puncto F, vt DC ad CF, ita fiat EC ad CG: junctæque BG, productæ vbi opus, occurrat in H ducta à puncto F ipſi AD æquidiſtans FH; erit punctum H in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.



Secet enim BG rectam AD in I: & FH rectam AC in K: iungaturque IK. Quoniam igitur eſt vt DC ad CF, ita EC ad CG: & vt DC ad CF, ita eſt DA ad FK: vtque EC ad CG, ita eſt AD ad DI: erit DI æqualis FK: & IK parallela & æqualis DF. Sed vt BD ad DI, hoc eſt FK, ita erit IK, hoc eſt DF, ad KH: quare, permutando, vt BD ad DF, ita erit FK ad KH. Punctum igitur H, ex 28 huius, erit in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

CONSECT.

Hinc ſequitur Si diuiſa DC in quotlibet partes æquales, in totidem æquales diuidatur EC: & à ſingulis in DC punctis eductæ ipſi AD parallelæ occurrant ductis à puncto B ad ſingula reſpondentia in EC puncta; omnium occurſus in eadem fore parabola quæ per B, A, C tranſit.

Idemque eueniet Si, sumptis in vtraque DC & EC binis punctis eiusmodi, vt sit eadem vtrinque partium ab ipsis factarum inuicem ratio, rectæ assumpta puncta interiacentes in æquales quotlibet partes vtrinque diuidantur: ductisque rectis à puncto B ad singula in EC signata puncta occurrant eductæ à singulis in DC respondentibus punctis ipsi AD æquidistantes.

PROBL. XXIIII. PROP. XLI.

Circa datum quodcunque triangulum parabolam per puncta describere.

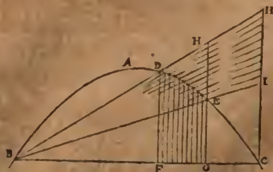


Sit triangulum BAC datum, circa quod oporteat parabolam per puncta describere.

Secta basi BC bifariam in D, ducatur AD, cui æquidistans educatur CE occurrens productæ BA in E: tum diuisa DC in æquales quotlibet partes, in totidem etiam æquales diuidatur CE: & à singulis in DC punctis, vt F, educantur ipsi AD æquidistantes, vt FH, quibus occurrant ductæ à puncto B ad singula respondentia in CE puncta vt, BG, in H: erunt, ex antecedente, inuenta huiusmodi puncta omnia, vt H, in eadem parabola quæ per puncta B,A,C transit. Quare si diuisa BD etiam in totidem partes à singulis in ipsa punctis educantur ipsi AD æquidistantibus æquales, earumque termini vna cum inuentis punctis æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabole quæsita circa triangulum BAC per puncta descripta. Quod facere opportebat.

PROBL. XXV. PROP. XLII.

Datæ parabolæ mutilæ defectum per intermedia puncta resarcire.



Sit parabola BAC mutila in DE.

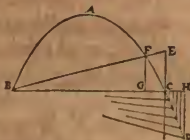
Ducantur diametro æquidistantes DF, EG: ductisque & productis BD, BE occurrat in H & I recta CH ipsis DF, EG æquidistans: vel etiam producta GE occurrat BD productæ in H: tum diuisa FG in quotlibet æquales partes, in totidem æquales diuidatur EH, vel HI: & ductis per B ad singula in EH, vel HI puncta rectis occurrant eductæ à singulis in FG

respondentibus

reſpondentibus punctis ipſis D F, E G æquidiſtantes: erunt occurſuum puncta omnia in eadem parabola quæ per puncta B, A, D, E, C tranſit. Quare ſi eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit D E defectus per ipſam reſtitutus. Quod facere oportebat.

PROBL. XXVI. PROP. XLIII.

Parabolæ portionem deſcriptam vlterius per puncta producere.



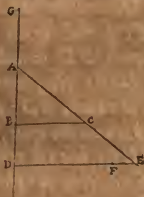
Sit deſcripta parabolæ portio B A C quam oporteat ad partes C producere.

Ducatur CE æquidiſtans diametro, & producatur quantùm opus: iunctaque BE ſectioni occurrat in F: & ducta FG parallela CE, producatur BC in H, vt CH ſit æqualis C G: productaque E C in I, vt ſit CI ipſi æqualis, diuidatur CH in quotlibet partes æquales, & in totidem æquales diuidatur CI: tum eductis à ſingulis in CH punctis ipſi CI parallelis occurrant ductæ à puncto B ad ſingula in CI reſpondentia puncta rectæ, vt in D: erunt, ex eadem 40 huius, occurſuum puncta omnia, vt D, in eadem B A C parabola. Quare & per eadem erit B A C portio continuata. Quod facere oportebat.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XVIII. PROP. XLIIII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC: productiſque AB, AC quantumlibet, ſumatur in AB producta punctum quodlibet D per quod agatur DE parallela BC: ſumaturque in DE recta DF cuius quadrato plus poſſit DE quàm BC: erit punctum F in hyperbola, cuius ſit vertex B, & dupla AB tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum ſe habens vt AB quadratum ad BC quadratum.

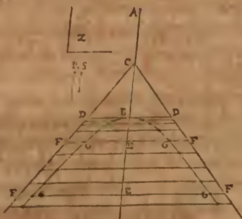


Producatur DA in G, vt ſit AG æqualis AB. Quoniam igitur vt AB quadratum ad BC quadratum, ita eſt AD quadratum ad DE quadratum: vt eſt AB quadratum ad BC quadratum, ſcilicet vt ablatum ad ablatum, ita etiam erit reliquum GDB rectangulum ad reliquum DF quadratum. Poſita igitur BG hyperboles tranſuerſa diametro, & centro A, rectaque BC quæ poſſit quadrantem figuræ ad GB tranſuerſam diametrum factæ: erit vt GB quadratum ad BA quadratum, ita figura ad

BG quadratum: & ita parameter ad BG transuersam diametrum. Quare &, ex coroll. 2. ad 13 primi huius, recta FD erit à sectione ad BD diametrum ordinatim applicata. Punctum igitur F in eadem erit sectione, siue hyperbola, cuius erit B vertex, & GB transuersa diameter ad contiguam parametrum se habens, vt AB quadratum ad BC quadratum. Quod erat demonstrandum.

PROBL. XXVII. PROP. XLV.

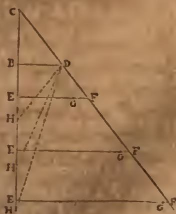
Datis hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ratione ad contiguam parametrum, in dato angulo; hyperbolem in plano per puncta quotlibet describere.



Data sit AB transuersa hyperboles diameter, & eiusdem ad contiguam in angulo Z dato parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secetur AB bifariam in C: & vt R ad S, ita fiat CB quadratum ad BD quadratum: sitque CBD angulus dato Z angulo æqualis: iuncta autem CD & producta, sumantur in producta CB quotlibet puncta, vt E, per quæ totidem ipsi BD agantur parallelæ vsque ad CD productam, vt EF, à quarum singulis quadratis ablato BD quadrato, reliqui quadrati apponatur cuique suum, vt EG, latus: erunt, ex antecedente, omnium termini, vt G, in hyperbola cuius sit AB transuersa diameter ad contiguam in dato ABD, siue Z, angulo parametrum se habens vt CB quadratum ad BD quadratum: hoc est vt R ad S. Quare si assignata huiusmodi puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæsita in plano per puncta descripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.



Hac autem ratione à singulis, vt EF, parallelarum quadratis quadratum BD commodè auferetur.

Ductæ seorsim CB insistat ad rectos eadem BD: productisque CB, CD quantum opus, fiat DH æqualis EF, hoc est centro D interuallo EF descriptus circuli arcus secet CB productam in H: sumptaque HB fiat æqualis EG in superiori problematis figura: erit

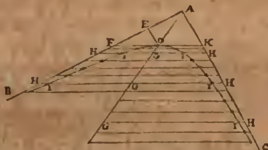
punctum G in eadem quæsita hyperbola. Eodemque modo & plura eiusdem puncta alia facilè inuenientur per quæ æquabili manus ductu describetur.

MONITVM.

Hoc autem compendium eò vsque duntaxat inseruiet, donec in sequentibus è datis quibuslibet coni sectionum diametris earumdem axes facili methodo se exhibebunt: eaque ratione ipsum hoc problema suum tunc inde feret compendium: existente scilicet angulo, sub datis transuersis diametris, & contiguis parametris contento, recto.

PROBL. XXVIII. PROP. XLVI.

Datis, positione, hyperboles asymptotis, & puncto in sectione; circa asymptotos hyperbolem per puncta describere.



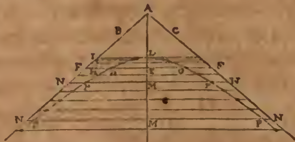
Sint datæ asymptoti A B, A C, & punctum D quod sit in quæsita hyperbola.

Ducatur A D, & producatur: fiatque D E parallela A C: & sumpta E F æquali E A, iungatur F D, & producatur in K: sumptisque in A D producta quotlibet punctis, vt G, per ea æquidistantes totidem ipsi F K ducantur alterutra asymptoto terminatæ, vt G H, à quarum quadratis ablato sigillatim quadrato ex F D, reliqui quadrati singulis suum apponatur latus, vt G I: erunt, ex demonstratis in 44 huius, acquisita huiusmodi puncta omnia, vt I, in eadem hyperbola quæ per D incedit, cuiusque asymptoti sunt ipsæ A B, A C rectæ: siue cuius sit D vertex, & dupla A D transuersa diameter ad contiguam in angulo A D K parametrum se habens, vt A D quadratum ad D K, vel D F, quadratum. Quare si æquabili manus ductu eadem inuenta puncta omnia curua iungantur linea; erit illa hyperbola per puncta descripta problemati satisfaciens. Quod erat propositum.

Aliter, & magis compendioſe.

PROBL. XXIX. PROP. XLVII.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per puncta deſcribere.



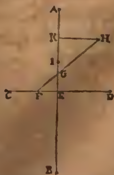
Sint datæ aſymptoti A B, A C, & punctum D quod ſit in quæſita hyperbola.

Secetur B A C angulus bifariam recta A E: & ad eam à puncto D perpendicularis ducatur D E, quæ, producta, aſymptotis A B, A C occurrat in F, & ſectioni in G: cuius autem quadrato plus poteſt recta EF quàm recta ED, vel EG, ſit recta E H: factaque H I parallela A E, & aſymptoto A B occurrens in I, ducatur ad A E perpendicularis I L: ſumptiſque in LE, vel in ipſa producta, quotlibet punctis, vt M, ipſi L I æquidiſtantes totidem ducantur alterutra aſymptoto terminatæ, vt M N: ſumaturque quadratorum M N, L I differentiæ latus M P: erunt, ex eadem 44 huius, acquiſita huiuſmodi puncta omnia, vt P, in eadem hyperbola quæ per D incedit, cuiuſque aſymptoti ſint A B, A C, & dupla A L axis tranſuerſus ad rectam parametrum ſe habens vt A L quadratum ad L I quadratum. Quare & ſic problemati ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.

Ad ſpecialem pro ellipſi methodum.

THEOR. XIX. PROP. XLVIII.

Si ſint binæ quælibet inæquales rectæ lineæ A B maior, C D minor, bifariam ſeſe & ad rectos in E ſecantes angulos, in quas cadat recta F G æqualis dimidiæ inter vtramque differentiæ, quæ producta in H faciat F H æqualem A E; erit punctum H in eadem ellipſi quæ per puncta B, C, A, D tranſit.



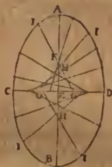
Sumatur A I æqualis E D: erit igitur I E æqualis F G. Cadat ab H ad A B perpendicularis HK: igitur vt EG ad GK, ita erit FG ad GH, hoc eſt E I ad I A: &, componendo, vt E K ad G K, ita erit E A ad I A, hoc eſt ad G H, vel E D. Igitur vt quadratum E K ad G K quadratum, ita erit A E quadratum ad G H, vel E D, quadratum: & ita reliquum B K A rectangulum ad reliquum H K quadratum. Poſitis igitur A B ellipſeos axe

axe maiore, & CD eiuſdem minore, erit, ex 8 primi huius, recta HK à ſectione ad axem AB ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit ellipſi, quæ per puncta B, C, A, D tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXX. PROP. XLIX.

Datis ellipſeos extremis diametris; ellipſim per puncta quotlibet in plano deſcribere.

Sint dati ellipſeos axes, ſiue extremæ diametri, AB, CD bifariam inuicem & ad rectos ſe ſecantes in E.



Sumpta AF æquali ED, ſumantur in recta FE puncta quotlibet, vt H, quibus vt centris circumferentiæ interuallo FE deſcriptæ ſecent CE, aut ED, in totidem punctis, vt in G: rectæque lineæ bina reſpondentia puncta iungentes, vt GH, producantur, vt in I, ita vt ſit HI æqualis AF, vel ED: erunt, ex antecedente, inuenta ſic puncta omnia, vt I, in eadem ellipſi quæ per puncta B, C, D, A tranſibit, hoc eſt cuius erunt AB, CD extremæ diametri. Quare ſi æquabili manus ductu eadem inuenta puncta curua iungantur linea; erit illa ellipſis quæſita in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

Suum etiam hæc methodus ſortietur compendium à circino tricruri, aut à canone, ſiue virga, cui cum in altero extremo inſiſtet acumen, inſuper duplex curſor vterque acuminatus aptabitur debito loco facilè firmandus. Cum enim acuminum interſtitia in directum firmata eadem fuerint, quæ, verbi gratia, G, H, I punctorum: duobus G, H in ipſis AB, CD diametris poſitis, & motis, reliquum I punctum ſemper in quæſita erit ſectione, ſiue ellipſi.

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XX. PROP. L.

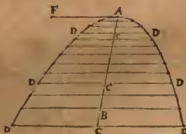
Si ſit recta quæpiam linea AB vtcunque ſecta in C: & eductæ quomodocunque CD quadratum fiat rectangulo ACB æquale; erit punctum D in parabola cuius erit A vertex, AC diameter, & CB ea iuxta quam poterunt à ſectione ad AC diametrum ordinatim ductæ, ſiue ſectionis parameter.



Patet enim hoc ex 7 primi huius, vbi ordinatarum quadrata rectangulis ſub interceptis à vertice & ea iuxta quam poſſunt, ſiue ſectionis parametro, oſtenduntur æqualia. Exiſtente igitur CB ſectionis parametro, A vertice, & AC intercepta diametro, erit DC recta à ſectione ad eandem AC diametrum ordinatim applicata. Quare & punctum D erit in parabola cuius ſit vertex A, diameter AC, & CB ſectionis parameter. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXI. PROP. LI.

Datis, poſitione, diametro, & contigua parametro; paraboles portionem per puncta quotlibet in plano deſcribere.



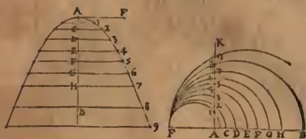
Sint datæ poſitione AB paraboles diameter, & AF eiuſdem parameter.

Sumantur in AB, etiam quantumlibet producta, quotlibet puncta, vt C, à quibus totidem ipſi AF parallelæ ducantur, vt CD, quarum quadrata ſingula fiant ſingulis FAC rectangulis æqualia: erunt, ex antecedente, omnium termini, vt D, in eadem parabola cuius ſit vertex A, diameter AC, & contigua parameter AF. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa paraboles portio quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

Compendioſa reddetur hæc methodus hac ratione.

Datæ rectæ FA, AB seorsim in vnam componantur rectam cui in A perpendicularis insistat AK: & diuisa vtraque AB in totidem partes æquales, vt in C, D, E, inter FA & vnamquamque rectæ AB partem ipsi FA continuam, vt AC, AD, AE, mediæ proportionales sumentur A2, A3, A4: (ipsæ autem mediantibus semicirculis ab ipsa AK perpendiculari facilè resecabuntur) tum à singulis in AB diametro punctis parametro AF æquidistantes ducentur C2, D3, E4, &c. quæ ipsis A2, A3, A4, singulæ scilicet singulis respondentibus, fient æquales: namque & hac ratione erunt puncta 2, 3, 4, & quotlibet eiusmodi alia in eadem parabola, cuius erit vertex A, diameter AC, & parameter AF.

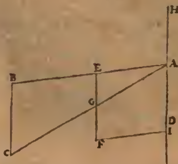


Ad specialem pro hyperbola methodum.

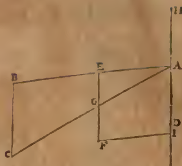
THEOR. XXI. PROP. LII.

Si sit triangulum quodcunque ABC: & à quolibet angulo A opposito BC lateri parellela agatur quæcunque AD: sumptoque in AB, etiam quandolibet producta, quolibet puncto E, ducatur eidem BC parallela EF, quæ secet AC in G, & possit quadrato bina AD, EG quadrata; erit punctum F in hyperbola cuius vertex erit D, & dupla AD transuersa diameter ad quam se habeat contigua parameter vt AB quadratum ad BC quadratum.

Sumatur in DA producta recta AH æqualis AD: ducaturque per F, si opus est productam, recta FI parallela AB. Erit igitur FI æqualis EA: atque AI æqualis EF. Et quoniam vt AB quadratum ad BC quadratum, ita est AE, siue FI, quadratum ad EG quadratum: estque EF, siue AI, quadratum duobus AD, EG quadratis æquale: itemque æquale est quadrato AD vna cum rectangulo HID:



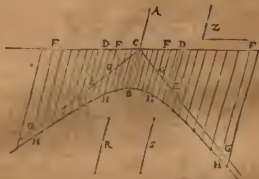
ablato igitur communi A D quadrato, erit reliquum H I D rectangulum reliquo E G quadrato æquale. Igitur vt A B quadratum ad B C quadratum, ita erit F I quadratum ad rectangulũ HID. Exiſtente igitur H D tranſuerſa hyperboles diametro & vertice D: poſitaque ratione H D tranſuerſæ diametri ad contiguam parametum eadem quæ C B quadrati ad B A quadratum; erit recta F I à ſectione ad D I diametrum ordinatim applicata, per coroll. 2 ad 13 primi huius. Quare punctum F in eadem erit hyperbola cuius erit vertex D, & tranſuerſa diameter dupla A D ad quam ſe contigua parameter habeat vt A B quadratum ad B C quadratum. Quod erat demonſtrandum.



PROBL. XXXII. PROP. LIII.

Datis hyperboles tranſuerſa diametro, & ratione eiuſdem ad contiguam parametrum in angulo dato; hyperbolem per puncta quotlibet in plano deſcribere.

Sit data A B tranſuerſa hyperboles diameter, & eiuſdem ratio ad contiguam in dato Z angulo parametrum eadem quæ R ad S.



Secetur A B bifariam in C: & vt R ad S, ita fiat A C quadratum ad C D quadratum: ſitque A C D angulus dato Z angulo æqualis: ducaturque D E æquidiſtans & æqualis C B: Iunctaque CE producatur quantum opus: tum ſumptis in C D, etiam quando opus producta, quotlibet punctis, vt F, per ea totidem ipſi A B parallelæ agantur rectæ, vt FH, ſecantes CE in G, quarum quadrata ſingula ſint ſingulis F G quadratis vna cum C B quadrato æqualia: Erunt, ex antecedente, omnes parallelarum huiuſmodi termini in eadem hyperbola cuius ſit vertex B, & tranſuerſa diameter A B ſe ad contiguam parametrum habens vt A C quadratum ad C D quadratum, hoc eſt vt R ad S. Quare ſi æquabili manus ductu acquiſiti huiuſmodi termini omnes curua iungantur linea; érit illa hyperbole quæſita per puncta in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM

Compendioſa ſatis forte videbitur hæc methodus, ſi ductæ ſeorſim

ſim AB inſiſtat ad rectos eadem CD: & reliqua perficiantur eadem quæ iam expoſita ſunt: ductiſque FGH parallelis quotlibet, ſumatur FI æqualis CB: & ſumpta IG reponatur in FH. Nam rectæ FH ſit acquiſitæ facilè è rectangula hac figura in obliquangulam ſuperiorem transferentur.

ALITER.

Sed & aliter etiam hæc methodus ſuum ſumet compendium.

Sint datæ, vt ſupra, AB tranſuerſa diameter, & ratio eiuſdem ad contiguam parametrum eadem quæ R ad S: datuſque inclinationis ad inuicem angulus Z.

Secta bifariam AB in C, fiat CBD angulus æqualis dato Z angulo: & vt R ad S, ita fiat CB quadratum ad BD quadratum: productaq́; DB in E, vt ſit BE æqualis BD: iungantur CD, CE, & producantur: tum ſecto DCE angulo bifariam recta CF, fiat BG ad CF perpendicularis, cui per C æquidiſtans ducetur CH: ductaque ad CH perpendiculari BI ſecante CD in K, ſumetur quadratorum BI, KI differentia cui æquale fiet quadratum ex CF: duceturque FL æquidiſtans CH: tum datis dupla CF axe tranſuerſo, & eiuſdem ad rectam parametrum ratione eadem quæ CF quadrati ad FL quadratum, è ductis CH & CL rectis puncta, per ſuperioris compendij methodum, comparabuntur per quæ æquabili manus ductu hyperbola facilè deſcribetur per datum B punctum tranſiens. Hinc & hoc adnectendum duximus problema ſequens.

EK: & BE æqualis EG: quare & rectangulum KEG rectangulo AEB erit æquale. Sed, propter æquales eadem ratione BL, LI, ideoque & GF, FK, rectangulum KEG vnà cum quadrato FG, æquale eſt quadrato EF, hoc eſt quadrato FG vnà cum quadrato EH: ablato igitur communi FG quadrato, erit reliquum EH quadratum reliquo KEG, hoc eſt AEB, rectangulo æquale. Eſtque angulus AEG rectus: quare punctum H in circuli erit circumferentia. Non ſit autem ACB angulus rectus. Ducatur inſuper KM parallela AB. Igitur, propter æquales AC, CI, & æquidiſtantem CL, erit BL, hoc eſt EF, æqualis LI: atque etiam & GF æqualis FK, hoc eſt LM: quare & reliqua EG reliquæ MI erit æqualis. Sed quoniam vt AE ad EK, ita eſt KM ad MI, hoc eſt EB ad EG: erit, permutando, vt AE ad EB, hoc eſt vt AE quadratum ad AEB rectangulum, ita EK ad EG, hoc eſt ita EK quadratum ad KEG rectangulum: rurſuſque permutando, vt AE quadratum ad EK quadratum, hoc eſt vt AD quadratum, vel ADB rectangulum, ad DC quadratum, ita erit AEB rectangulum ad KEG rectangulum, hoc eſt, ex iam oſtenſis, ad quadratum EH. Exiſtente igitur AB ellipſeos tranſuerſa diametro, & CD dimidia eidem coniugata, erit, ex coroll. 2 ad 13 primi huius, recta HE ab eadem ſectione ad eandem AB diametrum ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit ellipſi quæ per A, C, B tranſit, cuiuſque tranſuerſa diameter ſit AB. Quod erat demonſtrandum.

Probl. XXXIIII. Prop. LVI.

Circa poſitione datas tranſuerſam diametrum & vnam ex ordinatim ad ipſam ductis ellipſim per puncta quotlibet deſcribere.



Sint poſitione datæ AB tranſuerſa diameter, & CD vna ex ordinatim ad ipſam ductis.

Secetur AB bifariam in E: ducaturque EF æquidiſtans CD: & vt ACB rectangulum ad CD quadratum, ita fiat AE quadratum ad EF quadratum: iunganturque AF, FB: tum ducta FL æquidiſtante AB, ſumptiſque in AB quotlibet punctis, vt G, per ea totidem ipſi EF æquidiſtantes ducantur, vt GH, occurrentes FL in H, ſecanteſque AF, aut FB, in I, à quarum ſingulis quadratis ablato IH quadrato, reliqui vnicuique, hinc inde ab AB, reponatur proprij, vt

GK, quadrati latus : erunt, ex antecedente, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt K, in eadem ellipſi quæ per puncta A, D, F, B tranſit, cuiuſque ſit AB tranſuerſa diameter. Quare ſi eadem inuenta puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipſis quæſita circa AB tranſuerſam diametrum & CD ordinatam per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

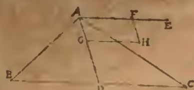
COMPENDIVM.

Huiuſce methodi compendium pendet è ſemicirculi ſuper EF, vel GH, aut ipſis æquali diametro, deſcriptione, in quo aptatis ſingulis ablatitiorum quadratorum lateralibus rectis, vt IH, fiet reliquæ circumferentiæ ſubtenſa debiti cuique quadrati recta lateralis, vt GK, è diametro GH reſecanda.

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XXIII. PROP. LVII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC, cuius baſis ſecta ſit bifariam in D: ductaque AD ducatur AE æquidiſtans & æqualis DC, & in quotlibet partes æquales diuidatur: perque numerum quadrato numeri partium in AE factarum æqualem diuidatur AD: ſumpta autem AF quotlibet partium ex AE, ſumatur, in AD, recta AG quadrato partium AF reſpondens: ductæque FH æquidiſtanti AD occurrat in H ducta GH æquidiſtans AE; erit punctum H in parabola quæ per B, A, C tranſit.

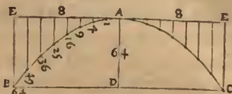


Quoniam enim AD reſpondet quadrato numeri partium AE, & AG quadrato numeri AF; vt AD ad AG, ita erit AE, hoc eſt DC, quadratum ad AF, hoc eſt GH, quadratum. Quare poſita AD paraboles diametro, & A vertice, erit vtraque DC, GH ad ipſam AD diametrum à ſectione ordinatim applicata, ex 7 primi huius. Eſtque BD æqualis & in directum DC: punctum igitur H in eadem erit parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXV.

PROBL. XXXV. PROP. LVIII.

Circa poſitione datas diametrum & baſim, figuram parabola contentam per puncta quotlibet in plano deſcribere.

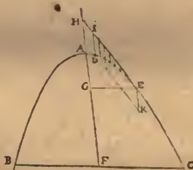


Sint poſitione datæ diameter A D, baſiſque B D C. Erit igitur B D æqualis D C.

Ducatur A E æquidiſtans & æqualis D C, & in partes quotlibet æquales ſecetur, vt in 8: ſeceturque A D, aut ipſi æqualis, in partes æquales 64: tum ductæ à ſingulis in A E diuiſionibus rectæ ipſi A D æquidiſtantes reſecentur ſingulæ ſecundùm numerum reſpondentis in A D quadrati, vt 1ª ſit vnius partis, 2ª quatuor, 3ª nouem, 4ª ſedecim, &c. qualium A D ſit 64: erunt, ductis A B, A C, ex antecedente, aſſignata eiuſmodi puncta omnia, ſiuè æquidiſtantium termini, in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu curva iungantur linea; erit illa parabolæ portio: ideoque & quæſita B A C figura circa A D diametrum & B D C baſim per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XXXVI. PROP. LIX.

Paraboles mutilæ hiatum per puncta quotlibet intermedia reſarcire.

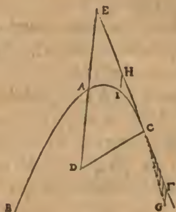


Sit parabola B A C hiatum habens in D E.

Ducta diametro quacumque A F, & ad eam ordinatim applicata B F C, ducatur E G parallela B C: factaque A H æquali A G, iungatur H E ad quam à puncto D ducatur D I æquidiſtans A F: ſectaque E I in quotlibet partes æquales, vt in 8, ſecetur & D I, aut ſecta intelligatur, in 64 partes etiam æquales, ſcilicet ſecundùm numerum quadrato numeri partium in E I factarum æqualem: tum ductæ à ſingulis in E I diuiſionibus ipſi A F diametro parallelæ reſecentur ſecundùm reſpondentes in D I quadratos numeros, vt 1ª ſit vnius qualium D I ſit 64, 2ª quatuor, 3ª nouem, atque ita conſequenter: erunt quippe omnium termini in eadem B A C parabola. Quod ducta E K æquidiſtante D I, & D K æquidiſtante I E, iunctaque D E, propter D E K triangulum, ex 57 huius, ſatis ſit manifeſtum. Quare ſic problemati ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.

PROBL. XXXVII. PROP. LX.

Parabolæ portionem vlterius per puncta quotlibet producere.



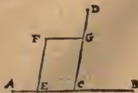
Sit parabolæ portio BAC quam oporteat vltra C producere.

Ducatur diameter quæcunque AD, & ad eam ordinatim applicetur CD: factaque AE æquali & in directum AD, iungatur EC, & producatur quantum opus, vt in F: sumptaque CH æquali CF, ducatur ad sectionem recta HI parallela AD, cui æqualis & parallela ducatur FG: diuisa autem CF in partes quotlibet æquales, vt in 5, vel 6, æstimabitur FG æqualium partium 25, vel 36: & à singulis in CF diuisionum punctis ductæ diametro AD parallelæ resecabuntur secundùm respondentes in FG numeros quadratos, facta scilicet 1ª & puncto C proxima vnius, 2ª quatuor, 3ª nouem, & ita deinceps: namque &, ex eadem 57 huius, erunt omnium termini in eadem BAC parabola continuata. Quare & per eadem sic inuenta puncta æquabili manus ductu facilè continuabitur, & sic problemati erit satisfactum. Quod facere propositum fuit.

Ad eiusdem methodi compendium.

THEOR. XXIV. PROP. LXI.

Si sit recta linea AB bifariam diuisa in C: eductaque quomodocunque recta CD, diuidatur vtraque AC, CB in quotlibet partes æquales: sumptaque AE earumdem quotlibet, educatur EF æquidistans CD: & qualium CD æstimabitur numero quadrato partium in AC, aut CB, factarum, earumdem sumatur pro recta EF numerus planus sub partibus AE, EB factus; Erit punctum F in eadem parabola quæ per A, D, B puncta transit.

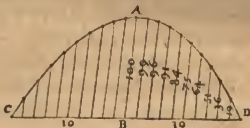


Ducatur enim recta FG æquidistans AB. Quoniam igitur qualium CD æstimatur numero quadrato partium quæ in AC vel CB, hoc est plano sub partibus in AC, CB factis, earundem & EF æquatur numero plano sub partibus AE, EB; vt ACB planum, siue rec-

tangulum, hoc eſt A C quadratum, ad A E B planum, ſiue rectangulum, ita erit DC numerus ad FE, hoc eſt G C, numerum: & ita recta DC ad rectam GC: quare, per conuerſionem rationis, vt AC quadratum ad E C, hoc eſt F G, quadratum, ita erit recta D C ad rectam D G. Poſita igitur D C paraboles diametro, & D vertice, erit, per 7 primi huius, vtraque recta A C, F G, à ſectione ad eandem D C diametrum ordinatim applicata. Quare & punctum F in eadem erit ſectione ſiue parabola quæ per puncta A, D, B tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXVIII. PROP. LXII.

Circa poſitione datas diametrum & baſim, portionem parabola contentam per puncta quotlibet deſcribere.



Sint datæ poſitione A B diameter, baſiſque recta CBD. Erit igitur CB æqualis BD.

Secetur vtraque CB, BD in partes quotlibet æquales, vt in 10, & à punctis ex diuiſione ortis educantur totidem ipſi A B æquidiſtantes: & qualium A B intelligetur tot partium quot in plano, ſiue quadrato, numero ſub partibus CB, BD factis vnitates continebuntur, earundem & vnaquæque æquidiſtantium ponatur tot quot planus numerus ſub partibus rectæ CD vtrinque ab ipſa interceptis conſtabit, hoc eſt prima ſeu diametro A B proxima ſit partium 99, ex ductu 11 in 9: ſecunda ſit partium 96, ex ductu 12 in 8: tertia ſit partium 91, ex ductu 13 in 7: ideoque & quarta ſit 84, quinta ſit 75, ſexta ſit 64, octaua 51, atque ita deinceps: erunt, ex antecedente, omnium termini in eadem parabola quæ per puncta C, A, D tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabolæ portio circa A B diametrum & CD baſim per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

MONITVM AD COMPENDIVM.

Monendus mihi lector hic visus est magnum fore compendium si ad has sectionum conicarum descriptiones opem conferat circinus analogicus siue proportionalis, sed iusto examine probatus. Sæpenumero enim eueniet vt diameter proponatur ita exigua, vt hic in parabola, quæ vix nisi eiusdem circini ope in plures diuidi poßit partes. At mediante circino magna parallelarum sylua educetur debitis numeris planis, in partibus qualium exigua diameter quadrato numeri omnium æstimabitur, facile resecanda. Cui compendio hoc insuper addendum censemus, sæpißime nos in describendis huiusmodi portionibus parallelogrammo substrato fulcri instar, vel etiam superstructo, vti, quo aptius rectarum resecandarum partes circino applicentur, aut inde exportentur. Quod apposita figura satis sit manifestum.

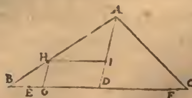




Ad specialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XXV. PROP. LXIII.

Si sit triangulum quodcumque ABC, in cuius alterutro latere, vt BC, bifariam secto in D bina E & F puncta æqualiter à media D sectione remota sumantur; erit vtrumque E & F punctum in eadem hyperbola specie data.



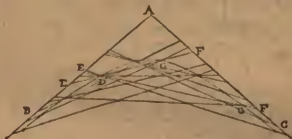
Ducatur enim AD: & rectangulo BEC æquale ponatur quadratum DG: atque à puncto G educatur GH parallela AD: agaturque HI parallela BC. Erit igitur HI quadratum quadrato GD, hoc est rectangulo BEC æquale. Quadratum autem BD æquale est quadrato DE vna cum rectangulo BEC: quare duobus HI, DE quadratis æquale erit quadratum BD. Quoniam autem in triangulo AIH productis AI, AH, à sumpto in AI producta puncto D parallela acta est DB, in qua sumpta est DE cuius quadrato

plus

plus poteſt BD quam HI: erit punctum E, per 44 huius, in hyperbola cuius erit I vertex, & dupla AI tranſuerſa diameter ad contiguam in angulo AIH parametrum ſe habens vt AI quadratum ad IH quadratum. Punctum igitur E in certa erit hyperbola. Sed & idem de puncto F eodem modo demonſtrabitur. Vtrumque igitur E & F punctum in eadem erit hyperbola ſpecie data. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXIX. PROP. LXIV.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per quotlibet alia puncta deſcribere.



Sint datæ aſymptoti AB, AC, punctumque in ſectione D.

Ducantur per D rectæ quæcunque, vt EDF, vtraque aſymptoto terminatæ, vt in E, & F: & rectis puncto D & citima aſymptoto interceptis, vt ED, vel DF, æquales ad alteram aſymptoton ſumantur, vt FG, aut EG: erunt, ex antecedente, eiuſmodi inuenta puncta omnia, æqualiter & ab vtroque termino in aſymptoto, & à media ſectione remota, in eadem hyperbola cum puncto D. Atque ſi rurſus circa quodlibet aliud inuentum præter D punctum idem problema exerceatur; erunt inuenta ſic quotlibet alia puncta per quæ eadem ſectio tranſibit. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita per quotlibet puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XXVI. PROP. LXV.

Si ſit triangulum quodcunque ABC: & in producto vtrolibet eiuſdem lateri, vt AB, ſumatur punctum quodlibet D, à quo ipſi BC parallela agatur DE: ſit autem rectangulo ABC æquale rectangulum ADE; erunt puncta E, C in eadem hyperbola ſpecie data.



Ducatur à puncto A ipſi BC parallela AK: ſumptaque BF æquali AB, ducatur FC, & producatur ad AK in I: eidemque per punctum E parallela agatur LEK coincidens AB in L, & ipſi AK in K, ſecanſque AC productam in M: iuncta autem EC & vtrinque producta occurrat AB

in G, & AK in H. Quoniam igitur rectangulo ABC æquale eſt rectangulum ADE: erit vt AB ad AD, ita DE ad BC, hoc eſt GD ad GB: &, diuidendo, vt AB ad BD, ita erit GD ad DB. Æqualis igitur erit GD ipſi AB. Quare & GE ipſi CH erit æqualis: & vt GE ad GC, hoc eſt EL ad CF, ita erit CI ad EK. Eſt autem CI æqualis CF, quoniam & AB eſt æqualis BF: rectangulum igitur LEK quadrato CF æquale erit. Sed rectangulo LEK vnà cum quadrato EM æquatur quadratum LM: plus poteſt igitur LM quàm CF quadrato EM. Eſtque EM parallela FC: igitur, per 44 huius, punctum E in eadem erit hyperbola, cuius erit C vertex, & dupla AC diameter tranſuerſa ſe ad contiguam in angulo ACF parametrum habens vt AC quadratum ad CF quadratum. Quare & in hyperbola erit ſpecie data. Quod erat demonſtrandum.

ALITER, ET BREVIVS.

Iungatur EC, & producatur occurrens AB productæ in G, & ductæ AH æquidiſtanti BC in H: ſeceturque EC bifariam in N. Igitur quoniam vt AB ad AD, ita eſt DE ad BC, hoc eſt GD ad GB: &, diuidendo, vt AB ad BD, ita eſt GD ad DB: atque ideò GD æqualis eſt AB: erit & GE æqualis CH. Igitur, propter triangulum AGH, erunt, ex 63 huius, puncta E, C æqualiter à media ſectione N remota in eadem hyperbola ſpecie nota. Quod erat demonſtrandum.

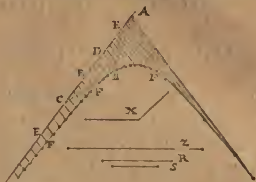
PROBL. XL PROP. LXVI.

Datis hyperboles tranſuerſa diametro, & eiuſdem ad contiguam in dato angulo parametrum ratione; hyperbolem per puncta in plano deſcribere.

Sit data quæſitæ hyperboles diameter Z, & eius ad contiguam in dato X angulo parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Sumpta AB æquali dimidio Z, vt R ad S, ita fiat AB quadratum ad BC quadratum: & ſit angulus ABC æqualis dato X angulo: iunctaque AC ſecetur bifariam in D: iungaturque BD: tum ſumptis in AC, etiam quantumlibet producta, quotlibet punctis, vt E, ducantur totidem ipſi BD parallelæ, vt EF, eiuſmodi vt rectangulo ADB

ſint æqualia ſingula omnia, vt AEF, rectangula: erunt, ex antecedente, inuenta puncta omnia, vt F, in eadem hyperbola cuius dupla A B, hoc eſt Z, tranſuerſa erit diameter ſe ad contiguam in angulo ABC parametrum habens, vt A B quadratum ad B C quadratum, hoc eſt vt R ad S. Quare ſi æquabili manus ductu inuenta huiuſmodi puncta omnia curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

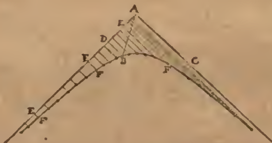


PROBL. XLI. PROP. LXVII.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per puncta in eodem plano deſcribere.

Sint datæ aſymptoti A E, A C, datumque in ſectione punctum B.

Ducatur ad vtramlibet A E, A C alteri æquidiſtans recta BD: & ſumptis in AD, vel in ipſa producta, quotlibet punctis, vt E, æquidiſtantes totidem ipſi DB ducantur vt E F, ita vt ſit ſemper A E F rectangulum rectangulo ADB æquale: erunt, vt in antecedente, acquiſita huiuſmodi puncta omnia, vt F, in eadem hyperbola quæ per punctum B tranſit, & cuius ſint aſymptoti A E, A C, iunctaque A B dimidia tranſuerſa diameter. Quare per eadem puncta quæſita ſectio facilè deſcribetur. Quod eſt propoſitum.



MONITVM.

Quoniam autem nonnunquam accidit, vt expoſita aliqua coni ſectio qualibet iam deſcripta proponatur imitanda: ita & qua ratione ex eadem ipſa aliæ maiores minoresue comparari & deſcribi poßint, neque inutile, neque iniucundum fore duximus hic adnectere: & quemadmodum à ſumpto quolibet intra expoſitam ſectionem puncto eductis quotlibet lineis ſimiliter ſectis, proportionalium termini omnes ſint in optata ſectione.

Ad generalem methodum vltimam.

THEOR. XXVII. PROP. LXVIII.

Si ſit data quæcunque coni ſectio AE cuius diameter ſit AB, & vertex A: producta autem BA quantumlibet in G, & ſumpto in AB puncto quolibet C, educatur quomodocunque recta CD ſectioni occurrens in E, facienſque rationem CE ad CD eandem ei quæ eſt CA ad CG: Dico punctum D fore in eiuſdem nominis ſectione cuius ſit vertex G, & diameter GB.

Ordinatim enim ad AB diametrum applicetur EI: (niſi ipſa CD ad ipſam iam ſit ordinatim applicata, quo caſu ambo I, C puncta in vnum coibunt) eidemque æquidiſtans ducatur DK: ſitque AE ſectio primùm parabola. Quoniam igitur vt CA ad GC, ita eſt CE ad CD: & ita CI ad CK, hoc eſt EI ad DK: atque etiam ita reliqua IA ad reliquam KG: permutando, vt EI ad IA, ita erit DK ad KG. Eſtque EI à ſectione, ſiue parabola AE ad AI diametrum ordinatim applicata: quare & DK etiam dicetur ab eiuſdem nominis ſectione, ſiue parabola, cuius vertex ſit G, ad GK, vel GB, diametrum ordinatim applicata. Ideoque & punctum D in eadem erit parabola cuius ſit vertex G, & diameter GB.

Sit iam AE ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, cuius tranſuerſa diameter ſit AF. Fiat vt CA ad CG, ita CF ad CH. Igitur quoniam vt CA ad CG, ita eſt CE ad CD: & ita EI ad DK, & CI ad CK: atque ideò & ita reliqua IA ad reliquam KG: & vt CF ad CH, hoc eſt CA ad CG: ita eſt CI ad CK: & ita reliqua FI ad reliquam HK: erit vt EI ad DK, ita IA ad KG: & ita FI ad HK. Quare, componendo, vt EI quadratum ad DK quadratum ita erit FIA rectangulum ad rectangulum HKG. Eſtque EI à ſectione cuius vertex ſit A, & tranſuerſa diameter AF, ad AI diametrum ordinatim applicata: quare & DK etiam dicetur ab eiuſdem nominis ſectione cuius vertex ſit G, & tranſuerſa diameter

diameter GH, ad GK, vel GB, diametrum ordinatim applicata. Ideoque & punctum D in eadem erit sectione, siue hyperbola, siue ellipsi, cuius vertex sit G, & diameter GB. Quod erat demonstrandum.

Sed & si vtrumque G & C punctum in recta AB, vel etiam in ipsa ad partes B producta, sumptum fuerit; eadem prorsus ratione punctum D demonstrabitur fore in eiusdem nominis sectione cuius sit GB diameter, & vertex G. Nihil enim diuersi inde accidet, nisi quod sectio quæ per puncta G, D incedet, priori casu ipsam AE sectionem continebit, & includet: at posteriori hoc casu ab ipsa includetur, & circumscribetur.

MONITVM.

Non te moueat, Lector, quòd hoc theorema ieiunè nimis à nobis sit propositum, eiusque conclusio non satis rei naturam assequatur, & exprimat. Hoc enim consultò à nobis est factum, ne nondum demonstrata locum hîc non proprium præoccuparent. Poterat certè è positis & demonstratis concludi punctum D esse in simili sectione ei quæ per puncta A & E transit: sed nondum similium coni sectionum communis natura innotuit, quæ totius huiusce speculationis & suscepti operis quartum sibi selegit librum. Ideoq; & nonnihil hîc dissimulauimus: semotisq; ijs quæ illius loci visa sunt propria, ea tantùm apposuimus quæ ad præsentem rem facerent. Quanquam & cuique liberum erit, si videbitur, siue hoc theorema, siue problema sequens, de similibus sectionibus enunciare: atque ita emensæ describendarum per puncta coni sectionum syluæ metam, & huic secundo libro generalem hanc coronidem imponere.

PROBL. XLII. PROP. LXIX.

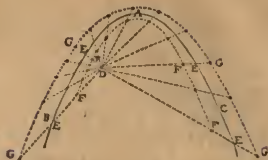
Data quacunque in plano coni sectione; Quotlibet alias eiusdem nominis sectiones in eodem plano per puncta exhibere.



Sit data coni sectio quæcunque BAC, siue parabola, siue hyperbola, siue etiam ellipsis.

Sumatur intra sectionem, vel etiam in ipsa sectione, quodlibet punctum D à quo ad ipsam sectionem ducatur quælibet recta DE, quæ producatur aut secetur in F & G vt videbitur: tum ab eodem D puncto ad eandem

sectionem ducantur quotlibet rectæ quæ semper in eandem DE ad DF, aut DG, rationem secentur aut producantur. Palam est, ex antecedente, puncta sic acquisita omnia, vt F, G, fore in coni sectionibus eiusdem nominis cuius sit & ipsa BAC sectio, quarum communis erit



eadem quæ ipsius BAC sectionis diameter quę per assumptum D punctum ducetur. Quare si assignata huiusmodi puncta omnia æquabili manus ductu curuis iungantur lineis; erunt illę eiusdem nominis sectiones cum data BAC sectione in eodem plano per puncta exhibitæ. Quod facere oportebat.

MONITVM.

Hic monuisse operæpretium duximus, quoniam ea tantùm nobis in emenso hoc secundo libro prosequi visum est quæ ad geometricam in plano coni sectionum per puncta describendarum rationem pertinerent, reliquas omnes earumdem sectionum describendarum methodos mechanicas, siue organicas, consultò hinc semouisse, & in proprium locum asseruasse sub appendicis mechanicæ ad hunc secundum librum titulo ad calcem operis amandato: vbi vnaquæque coni sectionum descriptio mechanica suam tunc aliquam huius libri geometricam per puncta describendi methodum originariam & πρωτότυπον assumet à qua pendeat, & fidem accipiat. Hinc appositæ à nobis in eodem hoc secundo libro pleræque methodi minùs compendiosæ, & quæ negligi facilè poterant, aut præteriri, nisi quod ad mechanicam vtiles, & organicæ alicui descriptioni viam structuræ suum etiam inibi locum obtinere meruerunt.

SECVNDI LIBRI FINIS.



Ad Tertium Conicorum Librum.

MONITVM.

Expositis hactenus Elementis Conicis, variisque describendarum Conicarum linearum compendiis, expedit iam tibi, Amice Lector, vt de eiusdem nominis coni sectionum comparatione ad inuicem dicere aggrediamur: quò in iisdem cautior euadas: ne cum opus fuerit, aut aliter occurrerit, ipsarum aliqua vti, incipias abuti. En igitur hoc tertio libro varias methodos sumus tradituri, quibus tu de illis examen instituere possis: & an propositæ, siue in plano siue in coni superficie, eiusdem nominis coni sectiones inuicem conueniant nec ne, & in quo differant ab inuicem, facilè tandem dignoscas.

Illud idem olim præstitisse debuit Apollonius ille magnus geometra qui sexti sui Conicorum libri argumentum περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν *esse voluit, & à limine primi indicauit. Quare hac in parte proximis duobus libris nostris ipsum siue sepultum suscitabimus, siue latitantem euocabimus aut excitabimus. Quanquam fortè pleraque noua etiam & Apollonio intacta ad institutum nostrum profutura proponentur à nobis: prout magni tibi momenti duximus specialem hanc coni sectionum culturam, quæ ideo pleniùs aliquantò inculcanda nobis visa est, & nouis propositis illustranda.*

Nouisti, si non fallimur, ex præmissis ipsas coni sectiones quoquo modo exprimere & imitari: sed an propositis aut quæsitis eædem sint, aut similes, nondum euincere didicisti. Horum igitur alterum tertio hoc libro tibi proponere decretum nobis est, alterum sequenti. Nec inconsultò: siquidem dum in ipsis propositæ cuicunque coni sectioni eandem aut similem in alicujus coni superficie exhibere iubemus: vel quum conum quærimus cuius illa sit sectio: aut etiam in exhibito quolibet cono eandem vel similem propositæ cuicunque inuenire proponimus: rationemque & methodum subinde tibi tradimus qua illud expedire valeas; etiam illud agimus, vt inde noua μηχανὴ *tibi innotescat, qua ex cuiuslibet secti coni vtroque fragmento quæsitam quam-*

cunque coni ſectionem exprimere & delineare poßis; non ſecus ac ſi circa coni ipſius aut cuiuſuis cylindri baſim ſtylo circumducto quæſitam intercepti circuli circumferentiam ſis deſcripturus. Quare & proximè præmißis ſatis cohærens nobis viſa eſt ſuſcepta huiuſmodi earumdem inuicem coni ſectionum diſcußio: ideoque & huius tertij libri propria, in quo multimodam etiam cuiuſcunque propoſiti coni ſectionem expendimus, & in propoſitæ cuiuſcunque ſectionis propriam coni ſuperficiem penè omnimodam inquiſiuimus, ſaltem quatenus propoſito conueniens nobis occurrit. Inſuper pleraque inibi ad phyſica experimenta, & ad ſolidorum locorum ſiue problematum compoſitiones tibi appoſuimus, non parum profutura. Sed iam Prodromus noſter profectionem alteram vrget: tu, ſi lubet, iterum accingere, & comitem te itineris illi adiunge.





CLAVDII MYDORGII
PATRICII PARISINI
CONICORVM
LIBER TERTIVS.

De eiusdem nominis Coni-sectionum inuicem comparatione prior.

SIVE

De Jisdem Coni-sectionibus

DEFINITIONES.

I.



SIMILES Coni-sectionum diametros dicimus, cum vnius anguli ab ordinatim ad ipsam ductis facti, æquales sunt alterius angulis qui ab ordinatim ad ipsam ductis fiunt.

II.

Coni-sectionem Coni-sectioni aptè superponi dicimus, cum binæ quælibet ipsarum similes diametri ita superponuntur & conueniunt, vt vertices congruant inuicem.

III.

Easdem Coni-sectiones dicimus, quæ congruunt omnino & conueniunt altera alteri aptè superposita.

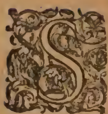
IIII.

Similes conos dicimus, quorum per axem sectorum ad rectos basi angulos triangula sunt similia.

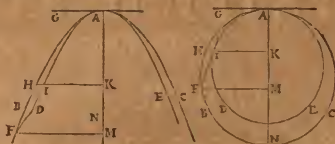
V.

Dissimiles dicimus, aut specie differentes, conos, quorum triangula per axem ad basim recta non sunt similia.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.



SI sint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, circa communem diametrum positæ, quas in communi vertice eadem recta contingat linea: & non sit altera alteri eadem; non erit illarum aliud insuper commune punctum.



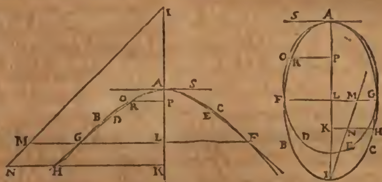
Sint binæ parabolæ, vel binæ circulorum circumferentiæ, B A C, D A E, quarum communis sit diameter A N, communisque vertex A: ipsasque contingat in A recta A G: non sit autem altera alteri parabola, vel circuli circumferentia, eadem. Dico non esse illarum aliud insuper commune punctum.

Si enim fieri potest, sit illarum aliud etiam commune punctum F. Ducaturq; rectæ AG æquidistans FM. Ordinatim igitur ad AN diametrum applicata erit FM. Quare & in vtraque parabola quadrato, vel rhombo, ex FM æquale erit rectangulum, vel parallelogrammum, sub intercepta diametro AM & contigua parametro. Et in vtraque circuli circumferentia quadrato FM erit æquale rectangulum sub eadem AM & residua diametro. Igitur tam vtriusque parabolæ parametri, quam vtriusque circuli circumferentiæ diametri erunt inuicem æquales. Quoniam autem non sunt eædem inuicem binæ BAC, DAE parabolæ, vel circulorum circumferentiæ; altera alteri non omnino congruit. Sit igitur in parabola, vel circuli circumferentia, BAC punctum quodcunque H in quo parabola, vel circumferentia, DAE ipsi non congruit: & ab ipso ad AN diametrum contingenti AG æquidistans ducatur HK, parabolam, vel circuli circumferentiam, DAE secans in I. Ordinatim igitur etiam applicata erit HIK: & erit major HK quàm IK: ideoque & quadratum HK majus quadrato IK. Sed in parabola BAC, quadrato, vel rhombo, HK æquale erit rectangulum, vel parallelogrammum, sub AK diametro & contigua parametro: & in parabola DAE, quadrato, vel rhombo, IK æquale erit rectangulum, vel parallelogrammum, sub eadem AK diametro & contigua parametro: parabolæ igitur DAE parameter communi AN diametro contigua minor erit parametro parabolæ BAC. Sed & jam æqualis ostensa est:

igitur & æqualis erit & minor, quod est absurdum. Atque etiam cum in circuli circumferentia BAC, quadrato HK æquale sit rectangulum sub AK & residua diametro: & in circumferentia DAE, quadrato IK æquale rectangulum sub eadem AK & residua item diametro: ideoque & huius diameter illius diametro sit minor: idem quoque absurdum sequetur. Non igitur parabola, aut circuli circumferentia, DAE parabolæ, vel circuli circumferentiæ, BAC in alio, præter communem A verticem, rursus communi puncto conuenit. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROP. II.

Si sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, non eędem inuicem, quas circa communem diametrum positas in communi vertice eadem recta contingat linea: & altera alteri occurrat; erunt illarum bina occursus puncta: sed in nullo alio communi puncto rursus conuenient.

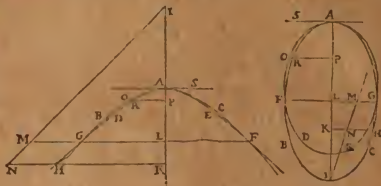


Sint binæ hyperbolæ, aut binę ellipses, BAC, DAE, quarum cõmunis vertex sit A, communisque diameter AK: ipsasque contingat in A recta AS: & altera alteri hyperbola, vel ellipsis, occurrat. Dico 1. hyperbolam, vel ellipsim, DAE hyperbolæ, vel ellipsi, BAC in duobus punctis occurrere.

Sit enim occursus punctum G. Et ducta rectæ AS æquidistans GL producatur ad vtramuis sectionem in F. Ordinatim igitur ad communem AK diametrum applicata erit vtraque GL, FL: ideoque & FL erit æqualis GL. Sunt autem puncta A,G,L in eodem plano: vtraque igitur sectio in eodem per AGL plano existit. Quare producta GL vtrique sectioni occurret in F. Occurret igitur rursus DAE sectio sectioni BAC in eodem F puncto. Quare erunt illarum bina G & F occursus puncta. Dico 2. in nullo alio communi puncto rursus conuenire.

Si enim fieri potest, conueniant rursus in puncto H. Ductaque HK æquidistans sit AS, ideoque & ad AK diametrum ordinatim applicata. Singulis autem KH, LG quadratis singula ponantur æqualia AKN, ALM rectangula: iunctaque & producta NM productæ AK diametro occurrat in I. Vt igitur NK ad KI, hoc est vt NKA rectangulum, siue HK quadratum, ad rectangulum IKA, ita erit

ML ad LI, hoc eſt ita MLA rectangulum, ſiue GL quadratum, ad rectangulum ILA: & permutatim. Quare, ex 8. primi huius, vtriuſq; ſectionis quæ per A,G,H puncta tranſit tranſuerſa diameter erit AI. Quoniam autem altera alteri ſectio non eſt eadem: ſumatur in cõmuni AK diametro, præter K & L, quodlibet aliud punctum P huiuſmodi, vt ducta rectæ AS æquidiſtans, ideoque & ad AK diametrum ordinatim

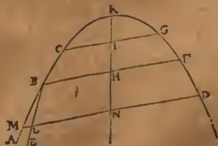


applicata, recta PRO interiorem ſectionem diuidat in R, & exteriori occurrat in O. Erit igitur OP major quàm RP: atque ideo & OP quadratum quadrato RP maius. Sed, propter AOGH ſectionem, vt IKA rectangulum ad HK quadratum, ita erit IPA rectangulum ad OP quadratum: ſimiliter &, propter ARGH ſectionem, vt IKA rectangulum ad HK quadratum, ita erit IPA rectangulum ad RP quadratum: quare vt IPA rectangulum ad OP quadratum, ita erit IPA rectangulum ad RP quadratum. Quadrato igitur RP æquale erit quadratum OP. Sed iam oſtenſum eſt maius: igitur & majus erit & æquale, quod eſt abſurdum. Non conuenit igitur DAE ſectio, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, ſectioni BAC, præter verticem & bina occurſus puncta, in alio rurſus communi puncto. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. III. PROP. III.

Coni ſectio coni ſectioni vel circuli circumferentiæ non conueniet ita, vt pars tantùm altera eadem ſit.

Si enim fieri poteſt, coni ſectio ABCD coni ſectioni, vel circuli circumferentiæ, EBCD in communi tantùm BCD portione conueniat. Sumpto autem communi quocunque puncto B, ducatur in portione BCD recta quæcunq; BF, cui



à puncto C, aut alio quolibet in eadem portione, ducatur æquidiſtans CG: ſectiſque bifariam BF, CG in H & I, iungatur HI & producatur ad ſectionem in K. Vtriuſque igitur ABCD, EBCD ſectionis diameter erit KH: & ad ipſam vtraq; BF, CG ordinatim

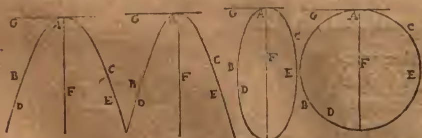
ordinatim erit applicata. A puncto autem D vtrique etiam sectioni communi, ipsis BF, CG æquidistans ducatur DM sectioni ABCD occurrens in M, & sectioni EBCD in L, ipsique KH diametro productæ in N. Igitur, propter communem KN diametrum, vtraque DM, DL bifariam erit secta in N: eritque LN æqualis MN, quod est absurdum. Siquidem autem punctum B terminus non sit communis BCD portionis, & ducta per D ipsi BF æquidistans eidem etiam portioni occurrat; ducetur recta quæcunque DM, eiusmodi vt alteri sectioni occurrat in M, & alteri in L, eidemque binæ æquidistantes in communi BCD portione ducentur, vt BF, CG, quibus bifariam in H & I diuisis, iuncta HI & producta in K vtriusque sectionis erit diameter, vnde idem absurdum sequetur necessariò. Quare vtriusque ABCD, EBCD sectionis existente parte aliqua BCD eadem; erit & reliqua vtrique communis. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Igitur, Si coni sectio coni sectioni aliqua ex parte congruit; & tota toti congruet.

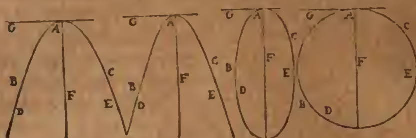
THEOR. IV. PROP. IV.

Si binæ parabolæ, vel binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, circa communem diametrum positæ, & eandem rectam lineam communi vertice contingentes, inuicem rursus conueniant: parabolæ quidem, veluti & circulorum circumferentiæ, in vno præter verticem communi puncto: at hyperbolæ, vel ellipses, etiam in tribus; erit altera alteri parabola, vel hyperbola, aut ellipsis, veluti & circuli circumferentia, eadem.



Sint binæ sectiones, vt proponuntur, BAC, DAE, quarum communis sit vertex A, communisque diameter AF: ipsasque in A recta contingat linea AG: sectio autem DAE sectioni BAC in aliquo insuper communi B puncto conueniat, si sint parabolæ, aut

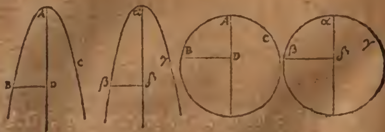
circulorũm circumferentiæ: vel etiam in tribus B,C,E punctis, ſi ſint hyperbolæ, aut ellipſes. Dico ſectionem D A E ſectioni B A C eſſe eandem.



Si enim fieri poteſt, non ſit altera alteri eadem. Siquidem igitur ſectiones B A C, D A E parabolæ ſunt, aut circulorum circumferentiæ, quoniam circa communem diametrum ſunt poſitæ, & ipſas in communi A vertice eadem recta contingit linea; non erit illarum aliud inſuper commune punctum in quo conueniant, ex 1. huius. Hoc autem eſt contra hypotheſim. Sed ſint hyperbolæ, vel ellipſes, quæ ſibi inuicem in duobus, præter communem A verticem, punctis conueniant; non erit igitur vllum aliud inſuper ipſarum commune punctum, ex 2. huius. Quod etiam eſt contra hypotheſim. Quare congruat & conueniat altera alteri ſectio neceſſe eſt. Atqui, ex anteced. non poteſt pro parte tantùm altera alteri congruere & conuenire: quare altera alteri applicata & ſuperpoſita omnino congruet & conueniet. Igitur &, ex def. altera alteri eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. V. PROP. V.

Si ſint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ: & vtrobique à ſectione ad diametrum rectâ ordinatim ductâ, fuerint tam ductæ vtriuſque quam interceptæ ab ipſis diametrorum portiones ad verticem æquales: atque in binis parabolis ęqualis etiam vtrobique angulus applicata & diametro contentus; erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem.



Sint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, B A C, $\beta \alpha \gamma$, quarum diametri A D, $\alpha \delta$. Ordinatimque ſint ductæ rectæ B D, $\beta \delta$, quæ inuicem ſint æquales. Sint autem & inſuper æquales rectæ A D, $\alpha \delta$: atque etiam, in bi-

nis parabolis, angulus $\alpha\delta\beta$ angulo ADB æqualis. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC esse eandem: & circuli circumferentiam circuli circumferentiæ.

Altera enim alteri parabola, aut circuli circumferentia, superponatur, ita vt diametri inter se congruant, & in vnam communem diametrum coeant. Igitur congruente verticis puncto α ipsi A, etiam & punctum δ puncto D congruet: &, propter æquales $\alpha\delta\beta$, ADB angulos, etiam & recta $\delta\beta$ rectæ DB congruet, & punctum β puncto B. Quæ igitur à communi α, vel A vertice ipsis $\beta\delta$, BD ducetur æquidistans, vtramque $\beta\alpha\gamma$, BAC sectionem in eodem communi vertice continget. Et altera alteri sectio insuper in vno communi β, vel B puncto conuenit: igitur, ex anteced. altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem erit. Quod erat demonstrandum.

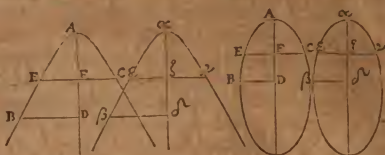
THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses: & binis vtrobique rectis à sectione ad diametrum ordinatim applicatis, fuerint vnius applicatæ, & interceptę ab ipsis diametri portiones ad verticem, alterius applicatis & interceptis, singulæ singulis, ęquales, & sub ęqualibus etiam vtrobique angulis coniunctæ; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, eadem.

Sint binæ hyperbolæ, vel binę ellipses, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum diametri AD, $\alpha\delta$: ordinatimq; à sectione BAC ductæ sint binæ BD, EF, rectæ: totidemque à sectione $\beta\alpha\gamma$ rectæ $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$. Sint autem tam ductæ $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$ ductis BD, EF, quam interceptæ diametri portiones $\alpha\delta$, $\alpha\zeta$ interceptis AD, AF singulæ singulis æquales: atque etiam angulus $\alpha\delta\beta$, angulo ADB æqualis. Dico hyperbolam aut ellipsim $\beta\alpha\gamma$, hyperbolæ aut ellipsi BAC esse eandem.

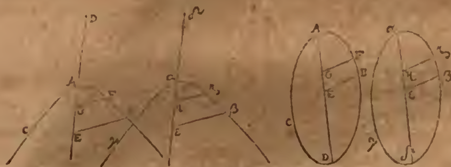
Producantur vtrobique EF, $\epsilon\zeta$ donec sectioni occurrant: sitque occursus in C & γ. Quoniam igitur vtraque $\alpha\zeta$, AF diameter est, & vtraque $\epsilon\zeta$, EF ordinatim applicata; erit & CF æqualis EF, & $\gamma\zeta$ æqualis $\epsilon\zeta$. Itaque superponatur altera alteri hyperbola, aut ellipsis, ita vt diametri $\alpha\delta$, AD inter se congruant, & in vnam communem dia-

metrum coeant: contingente igitur vertice α ipsum A, etiam & puncta ζ, δ punctis F, D coincident: & propter æquales αζε, AFE, itemque αζγ, AFC angulos, recta εγ rectæ EC, itemque recta δβ rectę DB congruet, & puncta γ, ε, β punctis C, E, B conuenient. Quæ igitur à communi vertice α, vel A ipsis εζ, EF ducetur æquidistans vtramque βαγ, BAC sectionem continget. Sed & altera alteri præter communem A verticem etiam in tribus B, E, C punctis conuenit: igitur, ex 4 huius, erit altera alteri sectio, siue hyperbola, siue ellipsis, eadem. Quod erat demonstrandum.



THEOR. VII. PROP. VII.

Si binæ hyperbolæ, vel binę ellipses, ęquales habeant diametros transuersas, & vtrobique à sectione ad easdem rectâ ordinatim applicatâ, fuerint tam applicatę inuicem, quam interceptæ ab ipsis diametrorum portiones ad verticem etiam inuicem ęquales: atque ęqualis angulus vtrobique applicata & diametro contentus; erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.



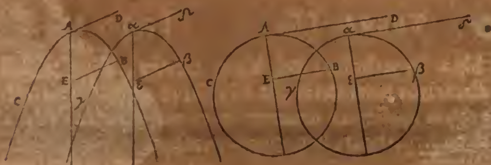
Sint binæ hyperbolæ, aut ellipses, BAC, βαγ, quarum transuersæ sint diametri AD, αδ inuicem æquales, & ad ipsas ordinatim ductæ rectæ BE, βε etiam æquales. Sint autem & interceptæ ab ipsis diametrorum portiones AE, αε inuicem æquales: atque insuper angulus αεβ angulo AEB æqualis. Dico hyperbolam aut ellipsim βαγ, hyperbolę aut ellipsi BAC esse eandem.

Sumptis enim æqualibus vtrobique diametrorum portionibus AG, αη, ipsis EB, εβ æquidistantes vtrobique agantur ad sectionem rectæ GF, ηζ. Igitur, propter vtramque sectionem, vt DEA rectangulum ad EB

ad EB quadratum, ita erit DGA rectangulum ad GF quadratum, & vt $\delta\epsilon\alpha$ rectangulum ad $\epsilon\beta$ quadratum, ita etiam erit $\delta\eta\alpha$ rectangulum ad $\eta\zeta$ quadratum. Vt autem DEA rectangulum ad EB quadratum, ita, propter æquales $\delta\epsilon$, DE, itemque $\alpha\epsilon$, AE, atque etiam $\epsilon\beta$, EB, erit $\delta\epsilon\alpha$ rectangulum ad $\epsilon\beta$ quadratum: igitur vt DGA rectangulum ad GF quadratum, ita erit $\delta\eta\alpha$ rectangulum ad $\eta\zeta$ quadratum. Sed, propter æquales DG, $\delta\eta$, itemque AG, $\alpha\eta$, rectangulo DGA æquale est rectangulum $\delta\eta\alpha$: igitur & quadrato GF etiam æquale erit quadratum $\eta\zeta$, ideoque & recta $\eta\zeta$ rectæ GF æqualis. Quare, ex antecedente, hyperbola vel ellipsis $\beta\alpha\gamma$, hyperbolæ vel ellipsi BAC eadem erit. Quod erat demonstrandum.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

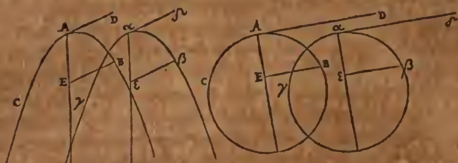
Si binæ parabolæ, vt & binæ circulorum circumferentiæ, parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad contiguas diametros applicatas; erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem.



Sint binæ parabolæ, vel binæ circulorum circumferentiæ, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum sint diametri AE, $\alpha\epsilon$, & contiguæ parametri AD, $\alpha\delta$. Sint autem $\alpha\delta$, AD inuicem æquales, atque etiam angulus $\delta\alpha\epsilon$ angulo DAE ęqualis. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolę BAC esse eandem: vt & circuli circumferentiam circuli circumferentiæ.

Sumptis enim æqualibus $\alpha\epsilon$, AE diametrorum portionibus, ipsis $\alpha\delta$, AD parametris parallelæ vtrobique ad sectionem agantur $\epsilon\beta$, EB. Vtraque igitur $\epsilon\beta$, EB ad diametrum ordinatim erit applicata: quare in parabolis quidem rectangulo DAE æquale erit EB quadratum, rectanguloque $\delta\alpha\epsilon$ quadratum $\epsilon\beta$ æquale. Et in circulorum circumferentiis, rectangulo DAE æqualia sunt bina EB, AE quadrata, rectanguloque $\delta\alpha\epsilon$ bina æqualia $\epsilon\beta$, $\alpha\epsilon$ quadrata. Sunt

autem & rectangula $\delta\alpha\epsilon$, D A E inuicem æqualia: atque etiam am-



bo $\alpha\,\epsilon$, A E quadrata æqualia inuicem: igitur & æqualia inuicem erunt ambo $\epsilon\,\beta$, E B quadrata, ideoque & rectæ $\epsilon\,\beta$, E B inuicem æquales. Atque est etiam angulus $\alpha\epsilon\beta$ angulo A E B æqualis: igitur, ex 5 huius, erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem. Quod erat demonstrandum.

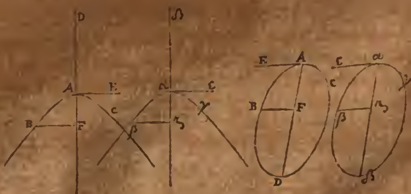
Coroll.

Itaque, Si binæ parabolæ æquales habeant rectas parametros; erit altera alteri parabola eadem.

Theor. IX. Prop. IX.

Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, æquales habeant diametros transuersas, & ad ipsas in æqualibus vtrobique angulis applicatas parametros etiam æquales; erit altera alteri hyperbola, siue ellipsis, eadem.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum sint diametri trãsuersę AD, $\alpha\,\delta$, & contiguæ parametri A E, $\alpha\,\epsilon$, Sint autem $\alpha\,\delta$, A D inuicem æquales, atque etiam $\alpha\,\epsilon$, A E inuicem: itemque angulus $\delta\,\alpha\,\epsilon$ angulo D A E æqualis. Dico hyperbolam vel ellipsim $\beta\,\alpha\,\gamma$, hyperbolæ aut ellipsi B A C esse eandem.



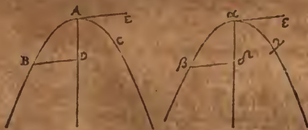
Sint enim sumptę æquales diametrorum portiones A F, $\alpha\zeta$: & ipsis A E, $\alpha\epsilon$ parametris æquidistantes ad sectionem ducantur F B, $\zeta\beta$. Vtraque igitur B F, $\beta\zeta$ ad diametrum ordinatim erit applicata: quare, propter vtramque sectionem, vt D A ad A E, ita erit rectangulum D F A ad quadratum F B: & vt $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$, ita erit rectangulum $\delta\zeta\alpha$ ad quadratum $\zeta\beta$. Vt autem D A ad A E, ita est $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$: igitur vt D F A rectangulum ad F B quadratum, ita erit $\delta\zeta\alpha$ rectangulum ad $\zeta\beta$ quadratum. Estque $\delta\zeta\alpha$ rectangulum rectangulo D F A æquale, quoniam & rectæ $\delta\zeta$, D F, itemque $\alpha\zeta$, A F sunt inuicem æquales: igitur & quadratum $\zeta\beta$ quadrato F B erit æquale, & recta $\zeta\beta$ rectæ F B æqualis. Suntque etiam anguli $\delta\zeta\beta$, D F B inuicem æquales: igitur, ex 7 huius, erit altera alteri hyperbola, siue ellipsis, eadem. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Itaque, Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, æquales habeant transuersos axes, atque etiam rectas parametros inuicem æquales; erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.

THEOR. X. PROP. X.

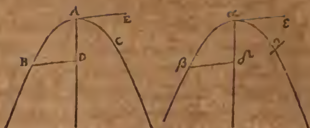
Si binæ coni sectiones eædem sint inuicem; quæ sub æqualibus vtrobique angulis applicabuntur parametri, æquales erunt inuicem, & transuersę item diametri inuicem.



Sint binæ coni sectiones eędem inuicem B A C, $\beta\alpha\gamma$, primùm parabolę, quarum diametri AD, $\alpha\delta$, & contiguæ parametri A E, $\alpha\epsilon$. Sit autem angulus $\epsilon\alpha\delta$ angulo E A D ęqualis. Dico $\alpha\epsilon$ parametrum parametro A E esse ęqualem.

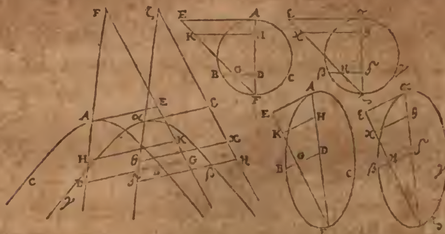
Sumptis enim ęqualibus AD, $\alpha\delta$, ipsis AE, $\alpha\epsilon$ rectis parallelę agantur D B, $\delta\beta$, & parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolę B A C superponatur, ita vt diametri $\alpha\delta$, A D in vnam coeant, punctumque verticis α ipsi A vertici congruat. Congruet igitur altera alteri parabola, ex definit. vt & recta $\delta\beta$ rectę D B: quare & punctum β puncto B. Æqualis igitur erit $\delta\beta$, ipsi D B, ideoque & quadratum $\delta\beta$ quadrato D B ęquale. Quoniam autem vtraque D B, $\delta\beta$ pa-

rametro æquidiſtat, erit & vtraque ad contiguam diametrum ordinatim applicata: ideoq; & quadratis ſingulis, vel rhombis, δβ, DB æqualia erunt ſingula δαε, DAE rectangula,



vel parallelogramma: igitur & ipſum δαε rectangulum, vel parallelogrammum, ipſi DAE rectangulo, vel parallelogrammo, erit æquale. Et ſunt æquales αδ, AD, rectæ: igitur & æquales erunt rectæ αε, AE, ſectionum ſcilicet parametri.

Sint iam binæ eædem inuicem ſectiones BAC, βαγ hyperbolæ,



ſiue ellipſes, vel etiam circulorum circumferentiæ, quarum tranſuerſæ diametri ſint AF, αζ, & ipſis contiguæ parametri AE, αε: ſitq; etiam angulus ζαε angulo FAE æqualis. Dico diametrum tranſverſam αζ tranſuerſæ diametro AF eſſe æqualem, atque etiam parametrum αε parametro AE.

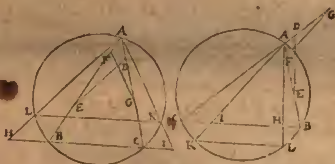
Sumptis namque æqualibus AD, αδ, ipſis AE, αε parametris parallelæ agantur DB, δβ. Quoniam igitur altera alteri ſectio eadem eſt, ſi inuicem ſuperponantur, ita vt diametri in vnam coeant, & vertices congruant inuicem; congruet altera alteri ſectio, ex definit. rectaque δβ rectæ DB congruet: quare & punctum β puncto B. Æqualis igitur erit recta δβ rectæ DB: ideoq; & quadratum δβ quadrato DB æquale. Ducantur FE, ζε, & in hyperbolis producantur: ipſiſque occurrant rectæ δβ, DB, vbi opus productæ, in η & G. Igitur ſingulis δβ, DB quadratis, vel rhombis, ex 13 primi huius, æqualia erunt ſingula αδη, ADG rectangula, vel parallelogramma: ideoque & recta δη rectæ DG erit æqualis. Sumptiſque rurſus binis æqualibus αθ, AH rectis, ductæ θκ, HK ipſis δη, DG æquidiſtantes eadem ratione inuicem oſtendentur æquales.

Et ſunt

Et sunt singulæ $\alpha\delta$, $\alpha\theta$ singulis AD, AH æquales: igitur & reliqua $\delta\theta$ reliquæ DH æqualis erit: & vt rectarum GD, KH differentia ad rectam DH, ita erit rectarum $\eta\delta$, $\kappa\theta$ differentia ad $\delta\theta$. Sed vt GD, KH differentia ad DH, ita est GD ad DF: & vt $\eta\delta$, $\kappa\theta$ differentia ad $\delta\theta$, ita est $\eta\delta$ ad $\delta\zeta$: igitur vt GD ad DF, ita erit $\eta\delta$ ad $\delta\zeta$: &, permutando, vt GD ad $\eta\delta$, ita erit DF ad $\delta\zeta$. Suntque GD, $\eta\delta$ æquales: igitur æquales erunt DF, $\delta\zeta$: ablatisque, vel additis, æqualibus AD, $\alpha\delta$, erunt reliquæ, vel compositæ, AF, $\alpha\zeta$, transuersæ scilicet sectionum diametri, inuicem æquales. Vt autem FD ad DG, ita est FA ad AE: & vt $\zeta\delta$ ad $\delta\eta$, ita est $\zeta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$: igitur vt FA ad AE, ita erit $\zeta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$: &, permutando, vt FA ad $\zeta\alpha$, ita erit AE ad $\alpha\epsilon$. Suntq; FA, $\zeta\alpha$ ostensæ inuicem æquales: igitur & $\alpha\epsilon$ parameter parametro AE æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

LEMMA I. PROP. XI.

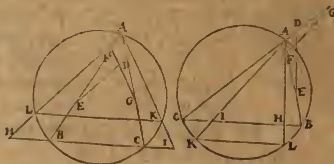
Si propositi cujuslibet trianguli internum verticis angulum, aut, producto alterutro vltra verticem crure, externum binæ rectæ subtendant, ita vt ad communem verticalem angulum bina constituant similia triangula: & rectis eiusmodi communi angulo subtensis parallelæ à trianguli vertice ad basim cadant; erunt sub interceptis sectæ, aut productæ basis partibus à dictis parallelis facta rectangula inuicem, vt parallelarum quadrata inuicem.



Sit triangulum quodcunq; BAC, cuius vertex A, basis BC: angulumque internum A, aut, producto alterutro, vt CA, crure, externum subtendant binæ DE, FG rectæ, ita vt sit triangulum ADE simile triangulo AFG: & binis DE, FG rectis communi angulo subtensis à vertice A ad basim BC binæ cadant parallelæ AH, AI. Dico vt quadratum AH ad quadratum AI, ita esse rectangulum BHC ad rectangulum BIC.

Circumscribatur enim triangulo BAC circulus cuius circumferentia ipsas AH, AI, vbi opus productas, secet in K & L: iungaturque KL. Quoniam igitur, propter parallelas FG, AI, itemque DE, AH, angulus CAK angulo AGF est æqualis, angulusque BAH æqualis angulo

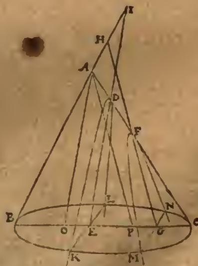
AED: &, propter ſimilitudinem triangulorum ADE, AFG, angulus FGA æqualis eſt angulo AED; erit & angulus CAK angulo BAH æqualis, ideoque & circumferentia LB æqualis circumferentiæ KC. Æquidiſtabit igitur LK ipſi BC, & vt AH ad HL, ita erit AI ad IK. Sed vt AH ad HL, ita eſt AH quadratum ad AHL, hoc eſt BHC, rectangulum: & vt AI ad IK, ita eſt AI quadratum ad AIK, hoc eſt BIC, rectangulum: igitur vt AH quadratum ad BHC rectangulum, ita erit AI quadratum ad BIC rectangulum: &, permutando, vt AH quadratum ad AI quadratum, ita erit BHC rectangulum ad BIC rectangulum. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XI. PROP. XII.

Si conus iam plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum per axem rectis, formantibuſque in ſuperficie binas hyperbolas, quarum productæ diametri conſtituant ad externum eiuſdem per axem trianguli verticalem angulum bina triangula ſimilia & æqualia; erit factarum huiuſmodi binarum hyperbolarum altera alteri eadem.

Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui per axem ad rectos baſi BC angulos ſectus plano faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum BAC rectis, formantibuſque in ſuperficie binas KDL, MFN hyperbolas, quarum ſint diametri DE, FG, quæ productæ occurrant cruri BA producto in I & H, & faciant bina ADI, AHF triangula ſimilia & æqualia. Dico hyperbolam MFN hyperbolæ KDL eſſe eandem.



Quoniam enim rectæ DI, FH tranſuerſæ ſunt ſectionum diametri; ipſis æquidiſtantes à vertice trianguli BAC ad baſim BC ducan-

tur rectæ, AO quidem ipsi DI, & AP ipsi FH. Igitur, ex antecedente, vt AO quadratum ad BOC rectangulum, ita erit AP quadratum ad BPC rectangulum. Sed vt AO quadratum ad BOC rectangulum, ita est, ex 14 primi huius, DI transuersa hyperbolę KDL diameter ad contiguam parametrum: & vt AP quadratum ad BPC rectangulum, ita est FH transuersa hyperbolæ MFN diameter ad parametrum contiguam: igitur vt DI transuersa hyperbolæ KDL diameter ad contiguam parametrum, ita erit FH transuersa hyperbolæ MFN diameter ad parametrum contiguam. Sed, propter triangula ADI, AHF similia & æqualia, æqualis est FH transuersa diameter transuersæ diametro DI: igitur & ipsis contiguæ parametri inuicem æquales erunt. Quoniam autem vtrumque per KDL & MFN, atque etiam basis coni planum, ad triangulum BAC rectum est; erunt communes eorumdem per KDL, MFN planorum cum base coni sectiones, scilicet rectæ KL, MN, ad idem BAC triangulum, ideoque & ad rectas omnes in eodem triangulo ipsas contingentes, perpendiculares: quare & vterq; DEK, FGM angulus erit rectus: & vtraq; KL, MN bifariam erit secta, hæc in G, illa in E. Vtraque igitur KE, MG à sectione ad diametrum erit ordinatim, & in angulo recto applicata: ideoq; & ipsis æquidistantes sectionum parametri ad ipsas DI, FH transuersas diametros in angulo etiam recto applicabuntur. Quare, ex 9 huius, hyperbola MFN hyperbolæ KDL eadem erit. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Hinc, & ex definit. Patet binas huiusmodi easdem inuicem KDL, MFN hyperbolas subcontrarias esse coni ABC sectiones, & in eiusdem superficie subcontrariè inuicem esse positas.

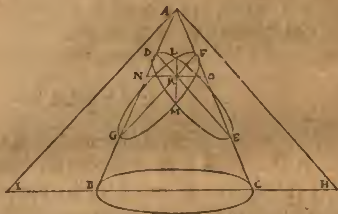
MONITVM.

Non inutile, nec spatio huic, alioqui lineis vacuo futuro, inconueniens duximus hìc adnotasse. Subcontrariæ sectionis definitionem nostram propositioni 3 *primi libri præmissam, hactenus fortè non satis notam, fieri iam conspicuam, & planam. Vt intelligamus, non solùm à plano basi coni subcontrariè posito eandem, aut similem in eiusdem coni superficie fieri sectionem subcontrariam, quæ circuli sit circumferentia, quod eadem* 3 *primi ostensum est: sed & à binis quibuslibet planis inuicem tantùm, non etiam basi coni subcontrariè positis binas fieri*

posse sectiones easdem inuicem, aut similes, quæ in eiusdem coni superficie subcontrariè inuicem sint positæ. Quod è subcontraria planorum positione ad angulum verticalem externum, de binis iisdem inuicem hyperbolis demonstrauit iam theorema proximè antecedens: & è subcontraria ad angulum verticalem internum positione, de binis iisdem inuicem ellipsibus proximè sequens etiam comprobabit. De similibus autem illud idem etiam suo tandem notum occurret loco.

THEOR. XII. PROP. XIII.

Si conus iam plano sectus per axem ad rectos basi angulos, rursus secetur duobus planis ad triangulum per axem rectis, formantibusque in superficie binas ellipses, quarum transuersæ diametri constituant ad internum eiusdem per axem trianguli verticalem angulum bina triangula similia, & æqualia; erit factarum huiusmodi binarum ellipsium altera alteri eadem.



Sit conus ABC, cuius vertex A, basis BC circulus, qui per axem ad rectos basi BC angulos sectus plano faciente triangulum BAC, rursus secetur duobus planis ad triangulum BAC rectis, formantibusque in superficie binas DME, FMG ellipses, quarum transuersæ diametri sint DE, FG, quæ constituant bina ADE, AFG triangula similia & æqualia. Dico ellipsim FMG ellipsi DME esse eandem.

Ducantur enim à vertice BAC trianguli ad eiusdem basim BC productam ipsis DE, FG æquidistantes AH, AI. Igitur, ex 11 huius, vt AH quadratum ad BHC rectangulum, ita erit AI quadratum ad BIC rectangulum. Sed vt AH quadratum ad BHC rectangulum, ita est DE transuersa ellipseos DME diameter ad contiguam parametrum: & vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita est FG transuersa ellipseos FMG diameter ad parametrum contiguam: igitur vt DE transuersa diameter ad contiguam parametrum, ita erit FG transuersa diameter ad parametrum contiguam. Sed, propter æqualia &

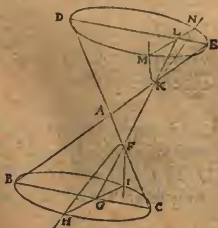
lia & ſimilia ADE, AFG triangula, æqualis eſt FG diameter diametro DE: igitur & ipſis contiguæ parametri erunt inuicem æquales. Sit iam communis planorum per DME, & FMG ſectio recta MKL, & per punctum K ipſis DE, FG diametris commune agatur recta NKO æquidiſtans BC. Quoniam igitur vtrumque per DME, & FMG planum ad triangulum BAC rectum eſt, erit & communis amborum ſectio MKL ad idem triangulum recta, ideoque & ad rectas DE, FG perpendicularis. Eſtque ad idem BAC triangulum etiam rectum baſis coni planum: planum igitur per MNO erit baſi coni æquidiſtans, eritque facta in ſuperficie ſectio NMO circuli circumferentia, cuius erit diameter recta NKO perpendicularis ad MKL. Secta igitur erit bifariam in K recta ML: ideoque & ad vtramq; DK, FK diametrum ordinatim, & in angulo recto erit applicata: quare & eidem æquidiſtantes ſectionum parametri, ipſis DE, FG tranſuerſis diametris contiguæ, in angulo etiam recto applicabuntur. Igitur, ex 9 huius, ellipſis FMG ellipſi DME erit eadem. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc etiam, & ex definit. Patet binas huiuſmodi eaſdem inuicem DME, FMG ellipſes ſubcontrarias eſſe coni ABC ſectiones, & in eiuſdem ſuperficie ſubcontrariè inuicem eſſe poſitas.

THEOR. XIII. PROP. XIIII.

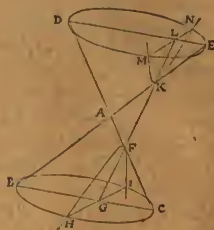
Si oppoſiti coni plano ſecentur non per verticem; erit factarum in vtraq; ſuperficie oppoſitarum hyperbolarum altera alteri eadem.



Sint oppoſiti coni ABC, ADE, quorum communis vertex A, baſes BC, DE circuli. Secenturque plano non tranſeunte per verticem, quod faciat in oppoſitis ſuperficiebus oppoſitas HFI, MKN hyperbolas. Dico hyperbolam MKN hyperbolæ HFI eſſe eandem.

Quoniam enim binæ HFI, MKN hyperbolæ ab vno eodemq; plano in oppoſitis ſuperficiebus ſunt factæ, erit, per 43 primi huius, vtrique communis tranſuerſa diameter,

& ipſi contigua vnius parameter alterius contiguæ parametro erit æqualis. Quoniam autem ABC, ADE coni ad verticem exiſtunt, erunt illorum baſes, nempe BC, DE circuli, æquidiſtantes inuicem, ex coroll. ad 42 primi huius. Sint earũdem cum plano per H,F,M,N,I communes ſectiones rectæ HI, MN; erunt HI, MN inuicem parallelæ. Secentur iam ABC, ADE coni plano per axem quod communes ſectiones in oppoſitis baſibus faciat rectas BC, DE ad ipſas HI, MN perpendiculares: ſitque plani triangulorum per axem BAC, DAE cum plano per H, F, M, N, I communis ſectio recta GL occurrens HI in G, & MN in L, hyperbolæque HFI in F, & hyperbolæ MKN in K. Vtraque igitur FG, KL ſuæ ſectionis diameter erit, per 5 primi huius. Quoniam autem vtraque BC, DE circuli diameter eſt, & ad ipſas perpendiculares ſunt HGI, MLN, erit vtraque HI, MN bifariam ſecta, HI quidem in G, & MN in L: ideoque & ad communem GL diametrum vtraque HG, ML ordinatim erit applicata. Eſt autem angulus KLN angulo FGH æqualis: igitur ſub æqualibus vtrobique angulis parameter ad contiguam communem tranſuerſam diametrum applicabitur. Quare, per 9 huius, oppoſitarum HFI, MKN hyperbolarum altera alteri eadem erit. Quod erat demonſtrandum.



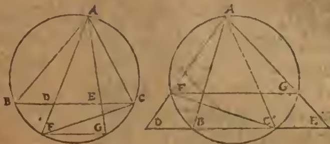
LEMMA II. PROP. XV.

Si propoſiti cuiuſlibet trianguli baſi bis ſectâ, aut vtrinque productâ, eadem ſit vtrobique quadrati rectæ à vertice ductæ ratio ad rectangulum ſub conterminis ſectæ aut productæ baſis partibus; erunt ad verticem ſiue internè vtrinque reſecti, ſiue externè additi vtrinque anguli inuicem æquales.

Sit triangulum BAC, cuius baſis BC ita ſit ſecta, aut vtrinque producta, in D & E, vt ſit eadem quadrati ductæ à vertice rectæ AD ad rectangulum BDC ratio, quæ quadrati ductæ AE ad rectangulum BEC. Dico angulum CAE angulo BAD eſſe æqualem.

Circumſcribatur enim triangulo BAC circulus ſecans AD, AE ſiue externas, ſiue internas productas, in F & G. Rectangulo igitur

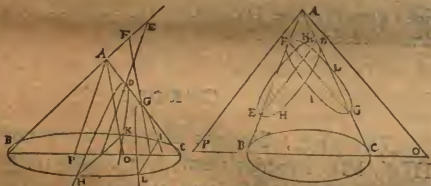
BDC æquale erit rectangulum ADF: & vt AE quadratum ad rectangulum BEC, ita erit AD quadratum ad rectangulum ADF. Sed eadem ratione, cum sit AEG rectangulum rectangulo BEC æquale; vt AD quadratum ad ADF rectangulum, hoc est vt AD ad DF, ita erit AE quadratum ad rectangulum AEG, hoc est ita AE ad EG: parallela igitur erit FG ipsi DE, siue BC. Quare cum sint puncta B, C, F, G in circulo, ductâ CF, erit angulus CFG, hoc est CAG, vel CAE, æqualis angulo BCF, hoc est BAF, siue BAD. Quod erat demonstrandum.



THEOR. XIIII. PROP. XVI.

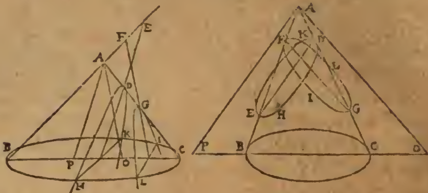
Si conus plano iam sectus per axem ad rectos basi angulos, rursus duobus planis secetur ad triangulum per axem rectis, formantibusque in superficie coni binas easdem inuicem siue hyperbolas, siue ellipses; erunt factarum huiusmodi sectionum transuersæ diametri ad angulum verticis eiusdem trianguli, siue externum, siue internum, subcontrariè inuicem positæ.

Sit conus ABC, cuius vertex A, basis BC circulus, qui sectus plano per axem ad basim recto faciente triangulum BAC, rursus secetur duobus planis ad triangulum BAC rectis, formantibusque in superficie binas HDK, IGL siue hyperbolas, siue ellipses, easdem inuicem, quarum transuersæ diametri sint DE, GF. Dico diametros DE, GF ad A verticalem trianguli BAC angulum, siue externum, siue internum, subcontrariè inuicem esse positas.



Cadant enim ab A vertice trianguli ad basim BC ipsis FG, DE

parallelæ A O, A P. Quoniam igitur binæ H D K, I G L ſectiones eędem ſunt inuicem; & vtrumque per ipſas planum ad triangulum B A C rectum eſt, erunt tranſuerſæ ipſarum diametri FG,



DE axes, ideoq; inuicem æquales, atque etiam rectæ parametri æquales inuicem, ex 10 huius: quare & vtrobique eadem erit tranſuerſi axis ad rectam parametrum ratio. Sed vt tranſuerſa F G diameter ad contiguam parametrum, ita eſt, ex 14 primi huius, A O quadratum ad B O C rectangulum: & vt tranſuerſa D E diameter ad contiguam parametrum, ita eſt A P quadratum ad B P C rectangulum: igitur vt A O quadratum ad B O C rectangulum, ita erit A P quadratum ad B P C rectangulum. Quare, ex antecedente, angulus B A P, hoc eſt A E D, angulo CAO, hoc eſt AGF, erit æqualis. Et communis eſt ad A angulus: triangulum igitur A G F triangulo A D E ſimile erit. Non ſunt autem baſes F G, D E æquidiſtantes inuicem, quoniam neque A G æquidiſtans eſt A P: igitur &, ex definit. triangulum A G F triangulo A D E ſubcontrariè erit poſitum. Quare & recta FG ad communem verticalem angulum, ſiue externum, ſiue internum, rectæ D E ſubcontrariè etiam erit poſita. Quod erat demonſtrandum.

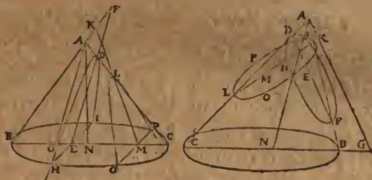
COROLL.

Hinc patet, Binarum huiuſmodi earumdem inuicem HDK, IGL hyperbolarum, ſiue ellipſium, plana ad idem per axem ſecti A B C coni triangulum recta, & ab eo ad verticis angulum, ſiue externum, ſiue internum, abſcindentia bina triangula A D E, A F G ſimilia baſes habentia non parallelas, ad coni verticem ſubcontrariè inuicem eſſe poſita: ideoque & ipſas H D K, I G L ſectiones ab ipſis factas ſubcontrarias eſſe eiuſdem A B C coni ſectiones, ex definit.

THEOR.

Theor. XV. Prop. XVII.

Si conus iam plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos, ſecetur rurſus alio plano ad triangulum per axem recto, formante in ſuperficie ſectionem quæ ſit hyperbole vel ellipſis: diameter autem ſectionis biſecanti angulum verticis eiuſdem trianguli non ſit æquidiſtans, neque perpendicularis; erit factæ in ſuperficie ſectioni altera in eadem ſuperficie ſectio eadem & ſubcontrariè poſita.

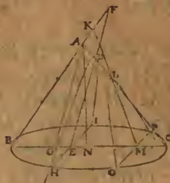


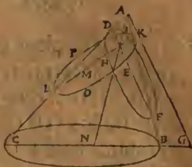
Sit conus ABC, cuius vertex A; baſis BC circulus, qui plano iam per axem ſectus faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem HDI hyperbolam, ſiue ellipſim, cuius diameter ſit DE: ſecet autem angulum BAC bifariam recta AN, & ei non æquidiſtet DE, neque ſit perpendicularis. Dico hyperbolæ, vel ellipſi, HDI alteram in eadem ſuperficie hyperbolam, vel ellipſim, eandem eſſe, & ſubcontrariè poſitam.

Ducatur enim AG æquidiſtans DE. Quoniam igitur DE non æquidiſtat AN, neq; eidem eſt perpendicularis; erit ad vtramq; ſectionem angulus ADF angulo AFD maior vel minor: ideoq; & recta AF maior vel minor quam recta AD. Fiat igitur AK æqualis AD & AL æqualis AF: iungaturq; KL, & vbi opus producatur. Trianlum igitur AKL triangulo ADF ſimile erit & æquale. Intelligatur itaque ABC conus rurſus per rectam KL vtrique AB, AC cruri occurrentem ſecari, plano ad triangulum BAC recto, quod in ſuperficie faciat ſectionem OLP. Siquidem KL vltra verticem trianguli BAC ipſis AB, AC occurrit; erit OLP ſectio hyperbola, ex definit. ſin autem infra verticem; erit OLP ſectio ellipſis. Quoniam autem ABC conus plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos, rurſus etiam ſecatur duobus planis ad triangulum per axem rectis, ſecundum binas FD, KL rectas lineas quæ vtrique

Rr

AB, AC lateri occurrentes bina constituunt AKL, ADF triangula similia & æqualia: suntq; ab eiusmodi planis factæ in superficie coni sectiones HDI, OLP hyperbolæ, siue ellipses; erit, ex 12 & 13 huius, altera alteri hyperbola, siue ellipsis, eadem: ideoque &, ex coroll. anteced. etiam altera alteri subcontrariè posita. Quod erat demonstrandum.

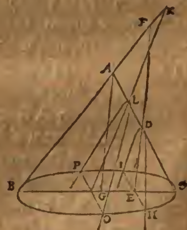




THEOR. XVI. PROP. XVIII.

Si conus iam plano sectus per axem ad rectos basi angulos, rursus secetur alio plano ad triangulum per axem recto, formante in superficie sectionem quæ sit hyperbole: diameter autem sectionis bisecanti angulum verticis eiusdem trianguli sit æquidistans; erit facta eiusmodi hyperbola singularis sectio: nec alteri hyperbolæ in eadem superficie subcontrariè erit posita.

Sit conus ABC, cuius vertex A, basis BC circulus, qui sectus iam per axem ad rectos basi BC angulos, plano faciente triangulum BAC, rursus secetur plano ad triangulum BAC recto, formante in superficie hyperbolam HDI, cuius diameter sit DE, cui æquidistans ponatur AG: secet autem AG angulum BAC bifariam. Dico hyperbolam HDI singularem esse sectionem, nec alteri hyperbolæ in eadem superficie subcontrariè esse positam.



Si enim fieri potest, sit altera OLP hyperbola ipsi HDI hyperbolæ subcontrariè posita. Sitque DF transuersa hyperbolæ HDI diameter: & KL transuersa diameter hyperbolæ OLP. Vtrumque igitur per HDI, & OLP planum ex definit. ad idem BAC triangulum erit rectum: abscissumque LAK triangulum abscisso FAD triangulo simile erit, & ad communem externum DAF angulum subcontrariè positum. Quoniam autem & FDE diameter parallela est AG, & sunt BAG, GAC anguli æquales: erunt & anguli AFD, ADF etiam æqua-

les. Iſoſceles igitur erit triangulum F A D: quare & eidem ſimile L A K triangulum etiam iſoſceles erit, baſiſque K L baſi D F erit æquidiſtans: ideoque & vtrumque L A K, F A D triangulum ad communem A verticem ſimiliter erit poſitum. Sed iam & ſubcontrariè alterum alteri poſitum oſtenſum eſt: igitur & ſubcontrariè, & ſimiliter erit poſitum, quod eſt abſurdùm. Hyperbola igitur OLP hyperbolæ H D I ſubcontrariè poſita non erit. Sed & idem de quacunque alia hyperbola demonſtrabitur: quare hyperbola H D I ſingularis erit coni A B C ſectio, nec alteri ſubcontrariè poſita. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc ſequitur, Hyperbolam O L P hyperbolæ H D I non eſſe eandem.

Quoniam &, ex 16 huius, ſequeretur tranſuerſam KL diametrum tranſuerſæ D F diametro ſubcontrariè ad communem A verticalem angulum eſſe poſitam: ideoque & triangulum LAK triangulo FAD eſſe ſubcontrariè poſitum. Quod abſurdum oſtenſum eſt.

THEOR. XVII. PROP. XIX.

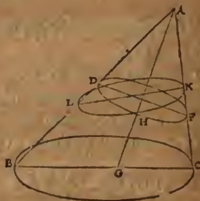
Cuicunque in cuiuſlibet coni recti ſuperficie ſectę ellipſi, altera in eadem ſuperficie ellipſis eadem eſt, & ſubcontrariè poſita.

Sit conus quilibet rectus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, in cuius ſuperficie ſecta ſit ellipſis quæcunque DEF. Dico ellipſi DEF alteram in eadem ſuperficie ellipſim eandem eſſe, & ſubcontrariè poſitam.

Intelligatur enim conus A B C ſectus plano per axem ad planum per D E F recto, quod faciat triangulum B A C, cuius communis cum plano per D E F ſectio ſit recta DF, tranſuerſa ſcilicet ellipſeos DEF diameter. Sumptoque baſis coni centro G, ducatur AG, quæ axis erit coni. Quoniam igitur conus A B C rectus eſt, erit B A C triangulum per axem iſoſceles, & ad baſim coni rectum: rectaque AG baſim BC bifariam ſecans etiam & angulum BAC bifariam ſecabit. Sed ad idem BAC triangulum etiam rectum eſt planum per D E F: & non eſt baſi B C æquidiſtans, ideoque neque D F æquidiſtans BC, neque perpendicularis ad A G: Igitur, ex 17 huius, ellipſi D E F altera in eadem ſuperficie ellipſis eadem erit, & ſubcontrariè poſita. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XVIII. PROP. XX.

Si conus ſcalenus plano iam ſectus per axem ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur plano ad triangulum per axem recto, formante in ſuperficie ſectionem quæ ſit ellipſis: diameter autem ſectionis biſecanti angulum verticis eiuſdem trianguli ſit perpendicularis; erit facta huiuſmodi ellipſis ſingularis ſectio: nec alteri in eadem ſuperficie ſubcontrariè erit poſita.



Sit conus ABC ſcalenus, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui per axem iam ſectus ad rectos baſi BC angulos plano faciente triangulum BAC ſcalenum, rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, formante in ſuperficie ellipſim DHF, cuius tranſuerſa diameter ſit DF: ducta autem AG angulum BAC bifariam diuidens ſit ad DF perpendicularis. Dico ellipſim DHF ſingularem eſſe ſectionem, nec alteri ellipſi in eadem ſuperficie ſubcontrariè eſſe poſitam.

Si enim fieri poteſt, ſit altera KHL ellipſis ipſi DHF ſubcontrariè poſita, cuius tranſuerſa diameter ſit KL. Vtrumque igitur per DHF, & KHL planum, ex definit. ad triangulum BAC rectum erit: triangulumque LAK triangulo FAD erit ſimile, & ſubcontrariè poſitum. Quoniam autem AG recta angulum BAC bifariam diuidit, & ad eam perpendicularis eſt DF, erunt anguli ADF, AFD inuicem æquales, triangulumque FAD iſoſceles erit: quare & eidem ſimile LAK triangulum etiam erit iſoſceles: ideoque baſis KL baſi DF erit æquidiſtans: & vtrumque LAK, FAD triangulum ad communem A verticalem angulum ſimiliter erit poſitum. Sed & ſubcontrariè iam alterum alteri poſitum oſtenſum eſt: igitur & ſubcontrariè, & ſimiliter poſitum erit, quod eſt abſurdum. Ellipſis igitur KHL ellipſi DEF ſubcontrariè poſita non erit. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Atque hinc etiam patet, Ellipſim KHL ellipſi DEF non eſſe eandem.

Siquidem

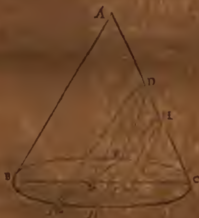
Siquidem, ex 16 huius, transuersa K L diameter transuersæ D F diametro ad communem A verticis angulum subcontrariè esset posita: ideoq; & triangulum L A K triangulo F A D subcontrariè positum. Quod absurdum ostensum est.

COROLL. II.

Ex proximè demonstratis igitur patet. Quoniam vniuscuiusque trianguli ad communem verticis angulum duplex tantùm reliquorum binorum angulorum fieri potest positionis permutatio, pro duplici tantùm basis ad permutatos reliquorum laterum terminos aptatione: ideo non plures etiam quàm binas fieri posse in eodem coni per axem secti triangulo subcontrarias sectiones: itaq; nec plures quam binas exhiberi posse hyperbolas, aut ellipses, in eodem trianguli per axem secti coni latere vertices habentes, quæ eædem sint inuicem.

THEOR. XIX. PROP. XXI.

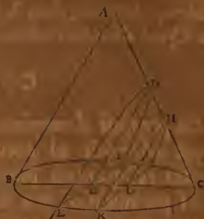
Si conus binis æquidistantibus planis secetur; non erit factarum in superficie binarum sectionum altera alteri eadem.



Sit conus A B C, cuius vertex A, basis B C circulus, qui duobus per E D F, & KHI planis æquidistantibus secetur: & sint factæ in eius superficie binæ quæcunque E D F, K H I sectiones. Dico sectionem KHI sectioni E D F non esse eandem.

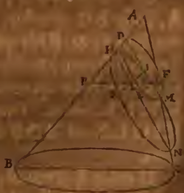
Si enim fieri potest, sit altera alteri sectio eadem. Quoniam igitur plana per E D F, & K H I æquidistant inuicem; erunt amborum communes cum base coni, aut ipsi æquidistante plano, sectiones E F, K I inuicem æquidistantes. Secetur itaq; ABC conus plano per axem quod faciat communem cum base coni, aut ipsi æquidistante plano, sectionem rectam BC ad ipsas EF, K I perpendicularem: sintque communes eiusdem per axem plani cum planis per E D F & K H I sectiones rectæ D G, H L, sectio-

num scilicet E D F, K H I diametri, quæ & æquidistantes erunt inuicem. Igitur, quoniam vtraque EF, K I perpendicularis est ad B C basis coni, aut circuli ipsi æquidistantis, diametrum; erit & vtraq; E F, K I ab eadem BC, aut ipsi æquidistante diametro, bifariam secta, EF quidem in G, & K I in L. Quare & E G ad D G diametrum ordinatim erit applicata, vt & K L ad diametrum HL. Sunt autem & binæ DG, GE binis HL, LK æquidistantes, ideoque & angulus H L K angulo D G E æqualis: igitur, per 10 huius, binarum E D F, K H I sectionum æquales erunt respondentes ipsis D G, H L diametris siue parametri inuicem, siue transuersæ diametri inuicem. Sint itaque primùm binæ E D F, K H I sectiones parabolæ. Igitur, ex 12 primi hujus, vt B A C rectangulum ab B C quadratum, ita erit recta A D ad contiguam ipsi D G diametro parametrum: & ita A H ad respondentem diametro HL parametrum. Maior autem est AH quàm AD: igitur & maior erit parabolæ K H I parameter diametro H L contigua, quàm parabolæ E D F diametro D G contigua parameter. Sed & iam ostensæ sunt æquales inuicem: igitur & æquales erunt & inæquales. Quod est absurdum. Non erit igitur parabola K H I parabolæ E D F eadem.



Sint iam binæ EDF, KHI sectiones hyperbolæ, aut ellipses, producanturq; ipsarum diametri DG, H L in M & N, vt sint DM, HN transuersæ earundem E D F, K H I sectionum diametri. Quoniam igitur & AH maior est quàm A D; erit & transuersa diameter HN maior quàm DM. Sed & æquales etiam iam sunt ostensæ: igitur & æquales erunt & inæquales. Quod item absurdum est. Binarum igitur in eiusdem coni superficie à duobus æquidistantibus planis factarum sectionum altera alteri eadem non erit. Quod erat demonstrandum.





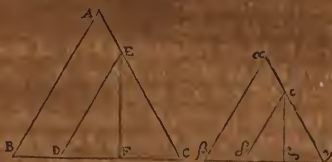
Coroll

Igitur, Neque ſi proponantur binæ quæcunque in eiuſdem coni ſuperficie ſectiones æquidiſtantes inuicem, altera alteri eadem erit.

Lemma. III. Prop. XXII.

Si ſint bina triangula iſoſcelia, quorum baſes ſint in eadem ratione ſectæ, & vtrobique à ſectionis puncto ad crus alterutrum recta alteri ducta parallela, eadem ſit vtrobique rectanguli ſub baſis partibus ad quadratum parallelæ ratio; erit alterum alteri triangulum ſimile.

Sint bina A B C, α β γ triangula iſoſcelia, quorum baſes B C, β γ ita ſectæ ſint in D, & δ, vt ſit β δ ad δ γ, veluti & B D ad D C: ductis autem D E, δ ε

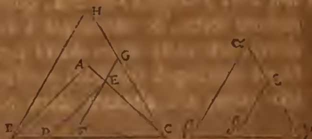


ipſis B A, β α parallelis, vt BDC rectangulum ad DE quadratum, ita ſit β δ γ rectangulum ad δ ε quadratum. Dico triangulum α β γ triangulo A B C eſſe ſimile.

Cadant enim perpendiculares EF, ε ζ. Igitur cum ſit β δ ad δ γ, vt B D ad D C; erit β δ ad δ ζ, vt B D ad D F. Sed vt B D ad D C, ita eſt B D quadratum ad BDC rectangulum: & vt β δ ad δ γ, ita eſt β δ quadratum ad β δ γ rectangulum: vtque B D C rectangulum ad D E quadratum, ita eſt β δ γ rectangulum ad δ ε quadratum: igitur, ex æquali, vt B D quadratum ad D E quadratum, ita erit β δ quadratum ad δ ε quadratum: ideoque vt B D ad D E, ita erit β δ ad δ ε. Sed iam vt B D ad D F, ita oſtenſum eſt eſſe β δ ad δ ζ: igitur, ex æquali rurſus, vt D E ad D F, ita erit δ ε ad δ ζ. Et eſt vterque ad F & ζ angulus rectus: triangulum igitur δ ε ζ triangulo D E F ſimile erit. Quare & duplum δ ε γ triangulum duplo D E C triangulo, ideoque & totum β α γ triangulum toti B A C triangulo ſimile erit. Quod erat demonſtrandum.

Lemma IV. Prop. XXIII.

Si sint bina triangula isoscelia, quorum bases sint ita sectæ, vt, ductâ vtrobique à sectionis puncto ad eius alterutrum alteri parallelâ, eadem sit vtrobique ratio rectanguli sub basis partibus ad quadratum parallelæ: non sit autem basis partium inuicem eadem vtrobique ratio, non erit alterum alteri triangulum simile.



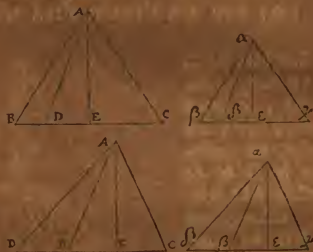
Sint bina BAC, $\beta\alpha\gamma$ triangula isoscelia, quorum bases BC, $\beta\gamma$ sectę sint, illa in D, hæc in δ: ductisq; DE, $\delta\varepsilon$ ipsis BA, $\beta\alpha$ parallelis, vt rectangulum BDC ad quadratum DE, ita sit rectangulum $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\varepsilon$: non sit autem vt BD ad DC, ita $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$. Dico triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo BAC non esse simile.

Si enim fieri potest, sit alterum alteri simile. Quoniam & vtrumque isosceles est, erit verticalis $\beta\alpha\gamma$ angulus verticali BAC angulo æqualis. Quoniam autem non est BD ad DC, vt $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$: fiat vt $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$, ita BF ad FC: & vt rectangulum $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\varepsilon$, ita fiat rectangulum BFC ad quadratum FG: ponaturq; CG æqualis FG, & producatur donec ductæ BH æquidistanti FG occurrat in H. Æqualis igitur erit & BH rectæ HC: quare vtrumq; FGC, BHC triangulum isosceles erit: &, ex antecedente, triangulum BHC triangulo $\beta\alpha\gamma$, ideoq; & triangulo BAC simile erit: & verticalis BHC angulus verticali BAC angulo erit æqualis. Sed, quoniam non est vt BD ad DC, ita BF ad FC, maior vel minor erit BF quàm BD. Sit primùm maior. Maior igitur erit BF ad FC, hoc est BFC rectanguli ad quadratum FC ratio, quàm BD ad DC, hoc est BDC rectanguli ad quadratum DC. Sed vt rectangulum BDC ad quadratum DE, ita est rectangulum BFC ad quadratum FG: maior igitur, ex æquali, erit GF quadrati ad FC quadratum, hoc est HB quadrati ad BC quadratum ratio, quàm ED quadrati ad DC quadratum, hoc est AB quadrati ad BC quadratum. Quare maius erit HB quadratum quadrato AB: ideoq; & HB maior quàm AB, & HC maior quàm AC. Igitur & angulus BAC maior erit angulo BHC, hoc est angulo $\beta\alpha\gamma$. Sed iam & æqualis est ostensus: igitur & æqualis erit & maior, quod est absurdum. Similiter

liter & si B F minor sit quàm B D, minor ostendetur B A C angulus angulo B H C, siue βαγ. Neutro igitur casu triangulum βαγ triangulo B A C erit simile. Quod erat demonstrandum.

LEMMA V. PROP. XXIIII.

Si sint bina triangula Isoscelia, quorum bases sint similiter sectæ, aut productæ: & sit vtrobique eadem ratio rectanguli sub segmentis basis, aut sub base producta & eius exteriori parte, ad quadratum ductæ à vertice ad sectionis punctum, aut productæ terminum; erit alterum alteri triangulum simile.



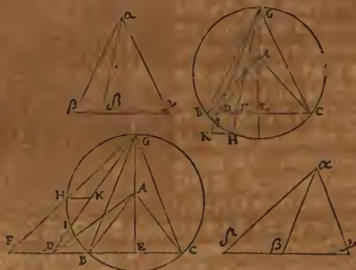
Sint bina triangula Isoscelia ABC, αβγ, quorum bases BC, βγ sint ita in D & δ sectæ, aut productæ, vt sit eadem βδ ad δγ ratio, quæ BD ad DC: atq; etiam ductis AD, αδ, eadem sit rectanguli βδγ ad quadratum δα ratio, quæ rectanguli BDC ad quadratum DA. Dico triangulum βαγ triangulo BAC esse simile.

Cadant enim vtrobique à vertice perpendiculares AE, αε. Quoniam igitur vt BD, ad DC, ita est βδ ad δγ: erit, in secta base componendo, & in producta diuidendo, sumptisque consequentium dimidiis, vt BD ad BE, ita βδ ad βε: rursusque, in secta diuidendo, & in producta componendo, vt BD ad DE, ita βδ ad δε. Est autem vt BDC rectangulum ad DA quadratum, ita βδγ rectangulum ad δα quadratum: & vt BDC rectangulum ad BD quadratum, ita est βδγ rectangulum ad βδ quadratum: igitur, ex æquali, vt BD quadratum ad DA quadratum, ita erit βδ quadratum ad δα quadratum: ideoque vt BD ad DA, ita erit βδ ad δα. Sed vt BD ad DE, ita iam ostensum est esse βδ ad δε: igitur, ex æquali rursus, vt AD ad DE, ita erit αδ ad δε. Estque vterque ad E & ε angulus rectus, atque ideo vterque ad A & α minor recto: triangulum igitur δαε triangulo DAE erit simile, & angulus αδε angulo ADE erit æqualis, ideoq; & in secta base reliquus αδβ angulus reliquo ADB etiam æqualis. Sed vt BD ad DA, ita iam est βδ ad δα: triangulum igitur βδα triangulo BDA

etiam ſimile erit: quare & in ſecta baſe compoſitum, aut in producta reliquum $\beta\alpha\epsilon$ triangulum compoſito aut reliquo BAE triangulo erit ſimile: ideoque & duplum $\beta\alpha\gamma$ triangulum duplo BAC triangulo ſimile erit. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA VI. PROP. XXV.

Si ſint bina triangula Iſoſcelia, quorum baſes ſint aut vtraq; ſecta, aut vtraque producta, ita vt ſit eadem vtrobique rectanguli ſub ſegmentis baſis, aut ſub baſe producta & eius exteriori parte, ad quadratum ductæ à vertice ad ſectionis punctum, aut productæ terminum ratio: non ſit autem eadem vtrobique baſis partium inuicem ratio; non erit alterum alteri triangulum ſimile.



Sint bina BAC, $\beta\alpha\gamma$ triangula iſoſcelia, quorum baſes BC, $\beta\gamma$ ſint ſectæ, aut productæ in D & δ: ductiſq; AD, $\alpha\delta$, vt rectangulum BDC ad quadratum DA, ita ſit rectangulum $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\alpha$: non ſit autem vt BD ad DC, ita $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$. Dico triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo BAC non eſſe ſimile.

Si enim fieri poteſt, ſit alterum alteri ſimile. Igitur quoniam vtrumque iſoſceles eſt, erit verticalis $\beta\alpha\gamma$ angulus verticali BAC angulo æqualis. Quoniam autem non eſt vt BD ad DC, ita $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$: fiat vt $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$, ita BF ad FC: ductaque AE perpendicularis ad BC producatur ad partes A in G, vt ſit rectangulum BFC ad quadratum ductæ FG, veluti rectangulum $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\alpha$: iunganturque GB, GC. Vtrumque igitur BGC, BAC triangulum iſoſceles erit; quare, ex anteced. triangulum BGC triangulo $\beta\alpha\gamma$, ideoque & triangulo BAC erit ſimile: atque verticalis BGC angulus verticali $\beta\alpha\gamma$, hoc eſt BAC angulo erit æqualis. Sed quoniam non eſt vt BD ad DC, ita BF ad FC: maiorque vel minor eſt BF quàm BD: ſit primùm maior: circumſcribaturque triangulo BGC circulus, cuius circumferentia ſecet rectam

GF, aut eidem productæ occurat in H: iunctaque GD circumferentiam secet in I, & ductę HK ipsi BC parallelę occurrat in K. Igitur vt GF ad FH, hoc est vt GF quadratum ad GFH, siue BFC rectangulum, ita erit GD ad DK, hoc est ita GD quadratum ad GDK rectangulum. Maior autem est hoc casu DK quàm DI, ideoque & GDK rectangulum maius rectangulo GDI: minor igitur erit GF quadrati ad BFC rectangulum, hoc est AD quadrati ad BDC rectangulum ratio, quàm GD quadrati ad rectangulum GDI, siue BDC. Quare minus erit quadratum AD quadrato GD: & recta GD maior quàm AD: ideoque & GE maior quàm AE. Sunt autem æquales GB, GC; itemque AB AC: minor igitur erit BGC hoc est βαγ, angulus angulo BAC. Sed & ei æqualis iam ostensus est: igitur & æqualis erit & minor, quod est absurdum. Similiter & si BF minor sit quàm BD, quoniam & hoc casu DI maior erit quàm DK, ideoque & DA maior quàm DG, & AE maior quàm GE: maior hoc casu eodem ostendetur BHC, siue βαγ, angulus angulo BAC, quod item absurdum erit. Quare neutro casu triangulum βαγ triangulo BAC erit simile. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XX. PROP. XXVI.

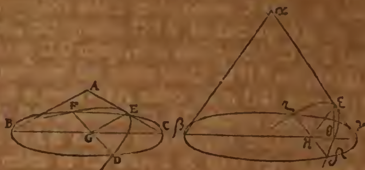
Cuilibet cuiuscunque coni sectioni alterius cuiuspiam dissimilis coni sectio aliqua eadem est.

Sit conus quilibet ABC, cuius vertex A, basis BC circulus: sitque in eius superficie facta sectio quæcunque DEF. Dico sectioni DEF aliquam in alterius dissimilis, aut specie differentis coni superficie sectionem esse eandem.

Sit enim primùm ABC conus rectus: & communis plani per DEF, & basis coni sectio sit recta DF: seceturque ABC conus per axem, & per rectam BC quæ ad DF, aut ipsi æquidistantem, sit perpendicularis, plano faciente triangulum BAC: communisque plani per DEF, & trianguli BAC sectio sit recta EG. Sectionis igitur diameter erit EG: & quoniam DF bifariam secta erit in G, erit ad EG diametrum ordinatim applicata DG.

Sit itaque iam sectio DEF parabola: ideoque & EG diameter

æquidiſtans A B. Expoſita recta $\beta\eta$, neutri B G aut G C æqualis, ſed vel maior vel minor, producta ſit in γ, vt ſit rectangulo B G C, hoc eſt quadrato D G, æquale rectangulum $\beta\eta\gamma$: ſectàque bifariam $\eta\gamma$ in θ, erecta ſit perpendicularis $\theta\epsilon$, cui in puncto ϵ occurrat ab η recta $\eta\epsilon$ æqualis E G: iunctaque $\gamma\epsilon$ & producta ductæ $\beta\alpha$ æquidiſtanti $\eta\epsilon$ occurrat in α. Erit igitur, propter æquales $\eta\theta$, $\theta\gamma$, & perpendicularem $\theta\epsilon$, vtrumque $\eta\epsilon\gamma$ & $\beta\alpha\gamma$ triangulum iſoſceles.

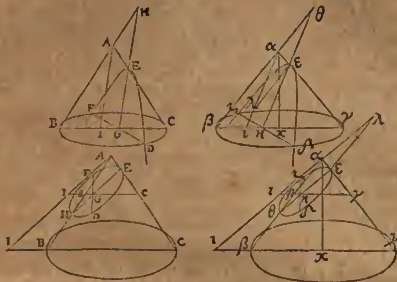


Intelligatur itaque $\alpha\beta\gamma$ conus rectus, cuius vertex α, baſis $\beta\gamma$ circulus, ſectus per axem plano faciente triangulum $\beta\alpha\gamma$ ad baſim coni rectum, rurſus ſecari per lineam rectam $\epsilon\eta$ rectæ $\alpha\beta$ æquidiſtantem plano ad idem $\beta\alpha\gamma$ triangulum recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem $\delta\epsilon\zeta$ parabolam, cuius ſit diameter recta $\epsilon\eta$. Dico parabolam $\delta\epsilon\zeta$ parabolæ DEF eſſe eandem, & in diſſimili, aut ſpecie differenti cono $\alpha\beta\gamma$ exhibitam.

Quoniam enim vtrumque per $\delta\epsilon\zeta$ & baſis coni planum ad triangulum $\beta\alpha\gamma$ rectum eſt, erit communis amborum ſectio, ſcilicet recta $\delta\eta\zeta$, ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque $\beta\gamma$, $\epsilon\eta$ perpendicularis, & bifariam ſecta in η. Itaque recta $\delta\eta$ ad $\epsilon\eta$ diametrum ordinatim erit applicata: vt & D G ad diametrum E G: & erit quadratum $\delta\eta$ rectangulo $\beta\eta\gamma$, hoc eſt quadrato D G, æquale: ideoque & ordinata $\delta\eta$ ordinatæ D G æqualis erit. Sed & $\epsilon\eta$ diameter diametro E G eſt etiam æqualis: itemque & vterque E G D, $\epsilon\eta\delta$ angulus rectus: igitur, ex 5 huius, parabole $\delta\epsilon\zeta$ parabolæ D E F eadem erit. Quoniam autem & $\beta\eta$ recta maior minor-ue eſt quàm BG, aut GC, maior erit vel minor $\beta\eta$ ad $\eta\gamma$ ratio, quàm B G ad G C. Suntque ambo triangula B A C, $\beta\alpha\gamma$ iſoſcelia: quare, per 23 huius, non erit triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo B A C ſimile. Sed & vtrumque per axem eſt, & ad baſim coni rectum: quare, ex definit. conus $\alpha\beta\gamma$ cono A B C diſſimilis erit. Sed neque exiſtente cono A B C ſcaleno, expoſitus $\alpha\beta\gamma$ conus ei ſimilis erit: propoſitæ igitur D E F coni A B C ſectioni, ſiue parabolæ, altera $\delta\epsilon\zeta$ parabola in diſſimilis, aut ſpecie differentis $\alpha\beta\gamma$ coni ſuperficie exhibita eadem eſt.

Sit iam propoſita coni A B C ſectio D E F hyperbola, vel ellipſis, eiuſque diameter E G, & ad ipſam ordinatim applicata D G. Producta igitur E G diameter vtrique AB, AC cruri occurret. Occurrat in H. Tranſuerſa igitur vtriuſque ſectionis diameter erit EH. Eidem à

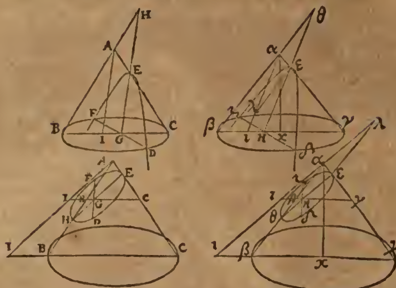
dem à vertice ad baſim BC æquidiſtans ducatur AI: & expoſita recta β. neutri BI aut IC ęqualis, ſed earum vnaquâq; vel maior vel minor, producta ſit in γ, ita vt rectangulo BIC æquale ſit rectangulum $\beta\iota\gamma$: ſectâque bifariam rectâ $\beta\gamma$ in κ, erecta perpendicularis $\kappa\alpha$ ſit eiuſmodi vt iuncta $\iota\alpha$ ſit æqualis IA: iũctis igitur $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, erit $\beta\alpha\gamma$ triangulum iſoſceles. Sumpta autem



in $\alpha\iota$, ſi opus eſt producta, recta $\alpha\lambda$ æquali HE, ductaque $\lambda\epsilon$ æquidiſtante $\alpha\beta$, quæ occurrat $\alpha\gamma$ in ϵ, ducatur etiam $\epsilon\theta$ æquidiſtans $\iota\alpha$: intelligaturque $\alpha\beta\gamma$ conus rectus, cuius vertex α, baſis $\beta\gamma$ circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum $\beta\alpha\gamma$ ad baſim coni rectum, rurſus ſecari ſecundum lineam rectam $\epsilon\theta$ vtrique $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ cruri occurrentem, plano ad triangulum $\beta\alpha\gamma$ recto, faciente in ſuperficie ſectionem $\delta\epsilon\zeta$ hyperbolam, vel ellipſim, cuius ſit tranſuerſa diameter $\epsilon\theta$. Dico hyperbolam, vel ellipſim $\delta\epsilon\zeta$ hyperbolæ, vel ellipſi DEF eſſe eandem, ſed in diſſimili & differenti $\alpha\beta\gamma$ cono exhibitam.

Sit enim plani per $\delta\epsilon\zeta$ & baſis coni, aut circuli ipſi æquidiſtantis, communis ſectio recta $\delta\eta\zeta$. Quoniam vtrumque per $\delta\epsilon\zeta$ & baſis coni planum ad triangulum $\beta\alpha\gamma$ eſt rectum, erit & recta $\delta\eta\zeta$ ad $\beta\gamma$, aut ipſi æquidiſtantem, & ad $\epsilon\eta$ perpendicularis, ideoq; & bifariam ſecta in η: quare & $\delta\eta$ ad $\epsilon\eta$ diametrum ordinatim erit applicata, vt & DG ad diametrum EG. Quoniam autem vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt $\alpha\iota$ quadratum ad $\beta\iota\gamma$ rectangulum: &, propter vtramque ſectionem, vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt ſectionis DEF tranſuerſa diameter EH ad contiguam parametrum: atq; etiam vt $\alpha\iota$ quadratum ad $\beta\iota\gamma$ rectangulum, ita eſt ſectionis $\delta\epsilon\zeta$ tranſuerſa diameter $\epsilon\theta$ ad contiguam parametrum; vt ſectionis DEF tranſuerſa diameter EH ad contiguam parametrum, ita erit ſectionis $\delta\epsilon\zeta$ tranſuerſa diameter $\epsilon\theta$ ad contiguam parametrum: & permutatim. Suntque tranſuerſæ EH, $\epsilon\theta$ diametri inuicem æquales, quoniam in parallelogrammo $\lambda\theta$ recta $\epsilon\theta$ æqualis eſt $\alpha\lambda$, hoc eſt HE: igitur & ſectionis vnius

parameter alterius ſectionis parametro erit æqualis. Sed &, propter vtrumque E G D, ε η δ angulum rectum, vtraq; E G, ε η diameter etiam axis eſt: igitur, per 9 huius, ſectio δ ε ζ hyperbola, ſiue ellipſis, ſectioni D E F hyperbolæ, ſiue ellipſi, erit eadem. Quoniam autem & recta β ι neutri B I aut I C æqualis eſt, maior erit vel minor β ι ad ι γ ratio quàm B I ad I C, aut C I ad I B: ſuntque rectangula B I C, β ι γ inuicem æqualia, vt & quadrata I A, ι α inuicem, ideoque vt B I C rectangulum ad I A quadratum, ita eſt rectangulum β ι γ ad quadratum ι α: & ſunt ambo B A C, β α γ triangula iſoſcelia, quoniam & vterque A B C, α β γ conus eſt rectus: igitur, ex antecedente, triangulum β α γ triangulo B A C non erit ſimile. Sed vtrumque per axem eſt, & ad baſim coni rectum: igitur, ex definit. neque conus α β γ cono A B C ſimilis erit. Exiſtente autem cono A B C ſcaleno, multo minùs expoſitus α β γ conus rectus ei ſimilis erit: propoſitæ igitur cuiuſcunque A B C coni ſectioni D E F altera δ ε ζ ſectio in diſſimilis aut ſpecie differentis α β γ coni ſuperficie exhibita eſt eadem. Quare conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

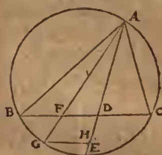


COROLL.

Ex hujus theorematis apparatu & πειραμῷ, ſatis patet, Data quacunque coni ſectione conum exhiberi poſſe in quo ſit ſectio datæ eadem: atque ideo cum proponetur data parabola, aut hyperbola, ſiue ellipſi, conum exhibere cuius ſit ſectio; inuenta recta ſectionis parametro, & inſuper in hyperbola & ellipſi etiam tranſuerſo axe, omnino ex eodem huius theorematis apparatu problemati ſatisfactum iri.

LEMMA VII. PROP. XXVII.

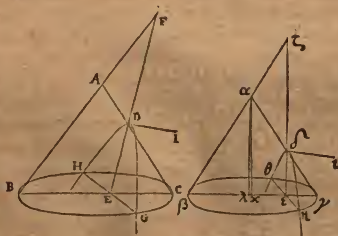
Si à vertice cuiuſcunque trianguli rectæ lineæ quotlibet ad baſim ducantur; minor erit ratio quadrati eius quæ angulum bifariam diuidet ad rectangulum ſub ſegmentis baſis ab ipſa factis, quàm quadrati cuiuſuis aliæ ad rectangulum ſub ſibi conterminis baſis ſegmentis.



Sit quodlibet triangulum B A C, à cuius vertice A ad baſim B C binæ, aut quotlibet, rectæ ducantur A D A F: ſecet autem AD angulum B A C bifariam. Dico minorem eſſe rationem quadrati A D ad rectangulum B D C, quàm quadrati AF ad rectangulum B F C. Triangulo enim B A C circumſcribatur circulus: & producantur A D, A F ad circumferentiam in E & G: atque à puncto G ducatur G H parallela B C. Erit igitur D H minor quàm D E, & vt AD ad D H, hoc eſt vt A D quadratum ad ADH rectangulum, ita erit AF ad FG, hoc eſt ita A F quadratum ad A F G, ſiue B F C, rectangulum. Sed rectangulo A D H maius eſt rectangulum A D E, ſiue B D C: minor erit igitur ratio A D quadrati ad B D C rectangulum, quàm A F quadrati ad B F C rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXI. PROP. XXVIII.

Non cuilibet cuiuſcunque coni hyperbolæ, alterius cuiuſlibet coni hyperbola aliqua eadem eſt.



Sit cuiuſcunque A B C coni ſectio hyperbola quælibet GDH, cuius vertex D, tranſuerſus axis D F, & recta parameter D I. Expoſituſque $\alpha\beta\gamma$ conus, cuius vertex α, baſis $\beta\gamma$ circulus, ſit eiuſmodi, vt cum ſectus fuerit plano per axem ad baſim recto, atq; à vertice ad baſim recta ducetur $\alpha\kappa$ angulum $\beta\alpha\gamma$ bifariam diuidens, maior ſit quadra-

ti $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$ ratio, quàm FD transuersi axis ad DI rectam parametrum. Dico nullam in expositi $\alpha\beta\gamma$ coni superficie secari posse hyperbolam, quæ propositæ GDH hyperbolæ sit eadem.

Si enim fieri potest, sit aliqua $\eta\delta\theta$ hyperbola coni $\alpha\beta\gamma$ sectio ipsi GDH hyperbolæ eadem, cuius trãsuersus axis sit $\zeta\delta$, & recta parameter $\delta\iota$. Erit igitur, ex 10 huius, $\zeta\delta$ æqualis FD, & $\delta\iota$ æqualis DI, ideoq; & eadem $\zeta\delta$ ad $\delta\iota$ ratio, quæ FD ad DI. Sit itaq; plani per $\eta\delta\theta$ & basis coni $\alpha\beta\gamma$ sectio communis recta $\eta\varepsilon\theta$. Seceturq; $\alpha\beta\gamma$ conus plano per axem faciente triangulum $\beta\alpha\gamma$, cuius basis $\beta\gamma$ sit ad rectam $\eta\varepsilon\theta$ perpendicularis: communisque eiusdem trianguli & plani per $\eta\delta\theta$ sectio sit recta $\varepsilon\delta$, quæ producta occurrat cruri $\beta\alpha$ producto in ζ: eique primùm æquidistet $\alpha\kappa$. Igitur vt quadratum $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$, ita erit transuersus axis $\zeta\delta$ ad $\delta\iota$ rectam parametrum. Maior autem est ratio quadrati $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$, quàm transuersi axis FD ad DI rectam parametrum: maior igitur erit ratio transuersi axis $\zeta\delta$ ad parametrum $\delta\iota$, quàm transuersi axis FD ad parametrum DI. Sed & iam ostensa est eadem: igitur & eadem erit & maior. Quod est absurdum.

Non æquidistet autem $\alpha\kappa$ rectæ $\zeta\delta$: ipsique $\zeta\delta$ æquidistans ducatur $\alpha\lambda$. Quoniam igitur recta $\alpha\kappa$ angulum $\beta\alpha\gamma$ bifariam diuidit, maior erit, ex antecedente, ratio quadrati $\alpha\lambda$ ad rectangulum $\beta\lambda\gamma$, quàm quadrati $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$. Sed vt $\alpha\lambda$ quadradratum ad rectangulum $\beta\lambda\gamma$, ita est transuersus axis $\zeta\delta$ ad rectam parametrum $\delta\iota$: multo igitur maior erit transuersi axis $\zeta\delta$ ad rectam parametrum $\delta\iota$ ratio, quàm transuersi FD axis ad rectam parametrum DI. Quare idem quoque absurdum sequetur. Nulla igitur coni $\alpha\beta\gamma$ hyperbola propositæ GDH hyperbolæ eadem erit. Quare constat propositum. Quod erat demonstrandum.

Coroll.

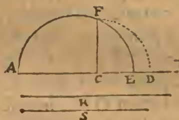
Ex hactenus demonstratis satis patet, Cuiuscunque coni recti acutanguli hyperbolam etiam coni recti rectanguli aut obtusanguli esse sectionem: sed non conuersim. Nam ab

acutangulo minore cono recto infiniti deinceps obtusiores vnam eandemq; exhibebunt hyperbolam, quam nullus specie minor, aut ad verticem acutior continebit. Quod idem de conis scalenis à planis ad rectos basibus angulos per axem sectis etiam verum esse ex præmissis liquidò constat.

LEMMA VIII. PROBL. I. PROP. XXIX.

Datam rectam bifariam sectam iterum secare, vt rectangulum sub inæqualibus totius segmentis ad quadratum intersegmenti datam teneat rationem.

Sit recta A B bifariam secta in C, iterumque secanda in D, vt rectangulum A D B ad quadratum D C se habeat vt R ad S.



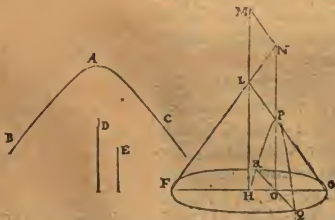
Fiat vt vtraque R & S ad S, ita A C ad C E: sitque inter A C & C E media proportionalis C F, cui æqualis secetur C D. Dico rectam A B esse in D sectam vt proponitur.

Quoniam enim vt R & S simul ad S, ità est A C ad C E, hoc est ita A C quadratum ad C F, siue C D, quadratum; erit, diuidendo, vt R ad S, ita rectangulum A D B ad quadratum C D. Quare secta est A B in D vt proponitur. Quod facere oportebat.

PROBL. II. PROP. XXX.

Data hyperbola; conum exhibere cuius sit sectio singularis.

Sit proposita quæcunque B A C hyperbola, cuius transuersus axis sit D, & recta parameter E. Oportet conum exhibere cuius hyperbola B A C singularis sit sectio.



Si quidem conus postulatur rectus; exposita quæcunque recta F G bifariam secetur in H:

& erectâ perpendiculari HL, cuius quadratum ad rectangulum FHG se habeat vt D ad E, iungantur LF, LG: & in producta HL sumatur LM æqualis transuerso axi D. Ductaque MN æquidistante LG, & productæ FL occurrente in N, ducatur NPO æquidistans LH, secansque LG in P: intelligaturq; LFG conus rectus, cuius vertex L, basis FG circulus, plano per axem sectus faciente triangulum FLG isosceles, rursus per lineam NPO secari plano quod in superficie faciat sectionem QPR, & in base rectam QOR ad FG perpendicularem. Erit vtique QPR sectio, ex 5. primi huius, hyperbola, cuius transuersus axis erit NP. Dico hyperbolam QPR hyperbolæ BAC esse eandem, & coni LFG recti singularem esse sectionem.

Quoniam enim NP æquidistat LM, itemque MN æquidistat LP, erit NP æqualis LM, hoc est transuerso axi D. Sed vt D ad E, ita est LH quadratum ad FHG rectangulum, & ita NP transuersus axis ad rectam hyperbolæ QPR parametrum: quare erit recta parameter hyperbolæ QPR ipsi E rectæ parametro æqualis. ideoq; &, per 9 huius, hyperbola QPR hyperbolæ BAC eadem erit. Quoniam autem propter æquales FH, HG, perpendicularis LH angulum FLG bifariam diuidit, & ei æquidistat NPO sectionis QPR diameter; erit, ex 18 huius, hyperbola QPR, exhibiti LFG coni singularis sectio.

Postuletur iam scalenus conus, cuius proposita BAC hyperbola sit sectio singularis.

Sumatur recta S minor quàm E. Et exposita recta FG bifariam secta in H, rursus secetur, per antecedentem, in I, ita vt rectangulum FIG ad quadratum IH se habeat veluti D ad S: Et vt D ad E, ita fiat FIG rectangulum ad IK quadratum. Maior igitur erit IK quàm IH. Erecta itaque perpendiculari HK, fiat

IK anguli IHK recti ſubtenſa, productaque KI in L, vt ſit KI ad IL, veluti E ad D: iungantur LF, LG: productâque KL ad partes L, ſumatur LM æqualis D: ductaque MN æquidiſtante LG, quæ occurrat productæ FL in N, ducatur, NPO æquidiſtans LK, ſecanſq; LG in P. Intelligatur itaque, vt ſupra, LFG conus ſcalenus plano ſectus per axem ad rectos baſi angulos faciente triangulum FLG, rurſus ſecari plano per lineam NPO faciente in ſuperficie hyperbolam QPR, & in baſi coni rectam lineam QOR ad FG eiuſdem baſis diametrum perpendicularem. Erit vtique recta NP tranſuerſus hyperbolæ QPR axis. Dico itaque rurſus hyperbolam QPR hyperbolæ BAC eſſe eandem, & exhibiti LFG coni ſcaleni ſectionem eſſe ſingularem.

Quoniam enim vt D ad E, ita eſt LI ad IK, hoc eſt ita LIK rectangulum ad IK quadratum: & ita etiam FIG rectangulum ad IK quadratum: ideoque & rectangulum FIG rectangulo LIK eſt æquale; vt LI quadratum ad LIK rectangulum, hoc eſt vt LI ad IK, ſiue vt D ad E, ita erit LI quadratum ad FIG rectangulum: & ita hyperbolæ QPR tranſuerſus axis NP ad rectam parametrum. Eſtq; NP æqualis LM, hoc eſt tranſuerſo axi D: quare & hyperbolæ QPR recta parameter ipſi E rectæ parametro hyperbolæ BAC erit æqualis: ideoque, &, per 9 huius, hyperbola QPR hyperbolæ BAC eadem erit. Iunctæ iam intelligantur FK, KG. Quoniam itaq; propter æqualia FIG, LIK rectangula, vt FI ad IL, ita eſt KI ad IG; & permutando, vt FI ad IK, ita eſt LI ad IG; erunt triangula FIL, KIG, itemque FIK, LIG ad I communem verticem æquiangula ſimilia, ideoq; & anguli FLI, IGK, itemque GLI & IFK inuicem æquales. Sunt autem, propter perpendicularem HK, anguli IFK & IGK inuicem æquales: quare & anguli FLI, GLI etiam inuicem æquales erunt. Recta igitur LI angulum FLG bifariam diuidit. Sed & ei æquidiſtat recta NPO ſectionis QPR diameter: igitur, ex eadem 18 huius, coni LFG ſingularis erit ſectio QPR, hoc eſt BAC, hyperbola. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. III. PROP. XXXI.

Data hyperbola; conum exhibere cuius ſit è binis ijſdem & ſubcontrariis ſectionibus vna.

Sit propoſita quæcunque B A C hyperbola, cuius axis tranſuerſus ſit D, & recta parameter E. Oporteatq; conum exhibere cuius hyperbola B A C ſit vna è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus. Poſtuleturque primò conus rectus.

Sumatur recta S minor quàm D: & expoſita recta quæcunque F G bifariam ſecta in H, rurſus, per 29 huius, ſecetur in I, ita vt rectangulum F I G ad quadratum I H, ſit veluti E ad S. Vt autem E ad D, ita fiat rectangulum F I G ad quadratum I L. Erit igitur I L maior quàm I H. Subtendat itaque recta I L angulum I H L rectum: iunganturque L F, L G, quæ inuicem æquales erunt: & in producta I L ſumatur L M æqualis D: atque ducta M N æquidiſtante L G, quæ occurrat F L productæ in N, ducatur recta N P O æquidiſtans I L, ſecanſque L G in P. Intelligatur iam L F G conus rectus, cuius vertex L, baſis F G circulus, plano iam per axem ſectus faciente F L G triangulum iſoſceles, rurſus ſecari per rectam N P O plano formante in ſuperficie ſectionem Q P R, & in baſe rectam Q O R perpendicularem ad F G. Oſtendetur itaque, vt in antecedente factum eſt, ſectionem Q P R eſſe hyperbolam, & propoſitæ B A C hyperbolæ eandem; ſed & Dico exhibiti L F G coni vnam eſſe è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus.

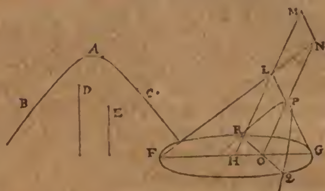
Quoniam enim L I diametro ſectionis æquidiſtans angulum F L G bifariam non diuidit, ſiquidem perpendicularis L H iſtud efficit; oſtendetur, vt in 17 huius, hyperbolæ Q P R aliam in eiuſdem L F G coni ſuperficie hyperbolam eandem eſſe, & ſubcontrariè poſitam. Quare exhibitus eſt L F G conus quæſitus.

Sin autem poſtuletur conus ſcalenus:

Expoſita quæcunque recta F G bifariam ſecetur in H, & vt E ad D, ita fiat F H G rectangulum ad H L quadratum: ſitque angulus

F H L

FHL obliquus: iunctis autem FL, LG, producatur HL in M, vt sit LM æqualis D: ductaque MN æquidistans sit LG, & NPO æquidistans HL. Intelligatur itaque, vt prius, LFG conus scalenus, primùm per axem ad rectos basi angulos sectus, plano faciente triangulum FLG scalenum, rursus per rectam NPO, secundùm lineam QOP perpendicularem ad FG, secari plano formante in superficie sectionem QPR.

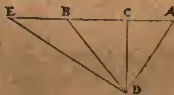


Ostendetur primò sectionem QPR hyperbolam esse, & propositę BAC hyperbolæ eandem. Deinde quoniam, propter inæquales FL, LG, & æquales FH, HG, maior est vel minor FL ad LG ratio quàm FH ad HG: ideoque recta LH angulum FLG bifariam non diuidit; demonstrabitur, ex eadem 17 huius, hyperbolæ QPR aliam in eiusdem LFG coni scaleni superficie hyperbolam eandem esse, & subcontrariè positam. Quare vtroq; casu exhibitus est LFG conus, cuius hyperbola QPR, hoc est proposita BAC hyperbola, vna est è binis ijsdem & subcontrarijs sectionibus. Quod facere oportebat.

LEMMA. IX. PROP. XXXII.

Sit recta linea AB, & ad ipsam perpendicularis CD: sitque maior CD ad CB ratio, quàm AC ad CD; iunctis AD, BD, Dico angulum ADB esse acutum.

Fiat enim vt AC ad CD, ita CD ad CE: iungaturque DE. Rectus igitur erit ADE angulus: & quoniam maior est CD ad CB ratio, quàm AC ad CD, hoc est CD ad CE: erit CB minor quàm CE: ideoque & angulus CDB minor quàm CDE: quare & totus ADB angulus recto ADE angulo erit minor, hoc est acutus. Quod erat demonstrandum.



COROLL.

Perpendicularis igitur quæ ab A puncto ad rectam BD ducetur, inter puncta B, D cadet.

MONITVM.

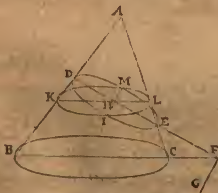
Miraberis fortè, Lector, & nosse cupies cur theorema hoc proximè sequens tacuerimus hactenus, quod suum in libro primo locum obtinere debuisse videri posit, vt ibidem ellipsis definitionem nostram firmaret, ipsamque à circuli circumferentia euidentiùs distingueret. Quandoquidem cum è numero coni sectionum quarum diametri vtriq; cruri trianguli per axem infra verticem occurrunt, censeri posint illæ quæ à planis aut æquidistantibus basi, aut ipsi subcontrariè positis fiunt, quas circulorum circumferentias esse ex inibi demonstratis constat; dubitari p..erat, num & alia quæpiam à plano basi non æquidistante, neque subcontrariè posito, facta coni sectio circuli etiam circumferentia dici deberet. Huicque dubio opportunam illic hoc ipsum quod proximè sequitur theorema medelam, & ellipseos definitioni firmitudinem allaturum haud dubiè fuerat. Veruntamen, quoniam si conus quispiam plano iam per axem sectus, rursus sit secandus plano quod triangulum per axem secet per eius verticem non transiens, quintuplex tantùm contingere potest plani ad triangulum eiusmodi positio: vt scilicet alterutri crurum trianguli æquidistet, aut alterutrum tantùm secet alteri vltra verticem occurrens, aut vtrique occurrat infra verticem basi coni primùm æquidistans, aut etiam vtrique similiter occurrat basi subcontrariè positum, aut denique vtrique cruri etiam occurrat infra verticem sed basi coni neque æquidistans neque subcontrariè sit positum: ideoque nec plures possunt in coni superficie post verticalem, siue trianguli rectilinei effectricem, fieri sectiones curuilineæ; earum primâ parabolæ deputatâ & eiusdem nomine insignitâ, secundâ hyperbolæ, tertiâ & quartâ circuli circumferentiæ, meritò reliqua vni & soli ellipsi propria nobis visa est: cui etiam vni & soli, ex huiusmodi sectionibus à plano vtrique crurum trianguli infra verticem occurrente factis, contigit demonstrata à nobis proposit. 49. 50. & 51. cum hyperbola habere communia: qua etiam nota iam potuit à circuli circumferentia satis distingui, vt quæ binos extra centrum sortita sit vmbilicos, quibus circuli circumferentia careat. Sed hoc insuper consilio à nobis hoc idem theorema huc asseruatum scire te volumus, quo-

niam non tam hactenus de proprio ellipſeos nomine ambigendum nobis viſum eſt, neque de indito ita ſollicitos reddi occurrit, vt initam pro ſuſcepta coni ſectionum ortus & propriæ cuiuſque naturæ expoſitione directam & ſimplicem demonſtrationis viam obliqua demonſtrandi huiuſce proximi theorematis methodo inflecteremus: ſatiſque duximus, in primo illo noſtro libro ea quæ ad inſtitutum facerent tibi proponere, & vera ipſa affirmatè euincere: non etiam alia omnia, vel quæ inde deriuari facile poterant, vel quæ ex obliquo incurrere, cuiuſmodi ipſum hoc ſequens theorema cenſemus, ibidem congerere: ſiquidem in immenſum libri moles abiiſſet nimiùm. Ne tamen, dum deinceps aut ellipſibus quibuſcunque datis eaſdem poſtulabis in coni ſuperficie, aut ipſas tibi exhibebimus, vel exhibendi methodum proponemus, dubius hæreas num à nobis propoſito ſit ſatisfactum: neu pro ellipſibus circulorum potiùs circumferentias tibi obtruſuri ſimus: hanc cautionem tunc primùm interponere nobis opportunum viſum eſt.

THEOR. XXI. PROP. XXXIII.

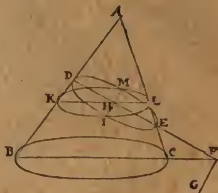
Si conus plano ſecetur quod vtrique crurum trianguli per axem infra eiuſdem verticem occurrat, baſi neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſitum; ſectio circuli circumferentia non erit.

Sit conus A B C, cuius vertex A, baſis B C circulus, qui plano ſecetur quod vtrique crurum cuiuſcunque trianguli per axem infra verticem occurrat, baſi B C neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſitum, & faciat in ſuperficie ſectionem D I E. Dico ſectionem D I E circuli circumferentiam non eſſe.



Sit enim, ſi fieri poteſt: & quoniam planum per D I E baſis plano non æquidiſtat, ſit amborum communis ſectio recta F G: ſeceturque A B C conus plano per axem quod faciat triangulum BAC, cuius baſis BC ſit ad rectam FG perpendicularis: communiſque plani per D I E & trianguli B A C ſectio ſit recta D E, in qua ſumpto

quolibet puncto H, ducatur KHL æquidistans BC: secetúrque rursus ABC conus per rectam KHL plano basi æquidistante, cuius & plani per DIE communis sectio sit recta IHM. Erit igitur IHM æquidistans FG: & ipsa KIL sectio circuli erit circumferentia, eiusque diameter KHL, quæ & ad rectam IHM erit perpendicularis, ipsamque bifariam secabit in H. Similiterque & per sumptum quodcunque aliud rectæ DE punctum recta in sectione DIE ducta ipsi FG æquidistans bifariam in ipso secari ostendetur. Quare circuli DIE diameter erit recta DHE: ideoque & recta IHM bifariam secta in H ad ipsam erit perpendicularis. Vtrumque igitur DHE & KHL rectangulum quadrato HI erit sigillatim æquale. Quare vt DH ad HK, ita erit LH ad HE: triangulumque LHE triangulo DHK simile erit: quare & angulus LEH, hoc est AED, angulo DKH, hoc est AKL, siue ABC, erit æqualis: ideoque & triangulum AED triangulo AKL, siue ABC, simile erit, & subcontrariè positum: rectaque DE rectæ KL subcontrariè erit posita. Et, propter communem planorum per DIE & KIL sectionem, scilicet rectam IHM, ad vtramque KH & DH perpendicularem, erit vtrumque per DIE & KIL, siue basis coni planum ad triangulum DHK, hoc est ad BAC triangulum, rectum: ideoq; & alterum alteri subcontrariè erit positum. Quod est absurdum. Positum enim est planum per DIE basi coni neque æquidistans neque subcontrariè positum. Sectio igitur DIE circuli circumferentia non erit. Quod erat demonstrandum.



COROLL. I.

Constat igitur certò jam, & ex definitionibus & è 6ª primi huius, Sectionem DIE, & huiusmodi quamcunque aliam à plano vtrique crurum trianguli per axem occurrente, basi coni non æquidistante, neque subcontrariè posito factam, ellipsim esse.

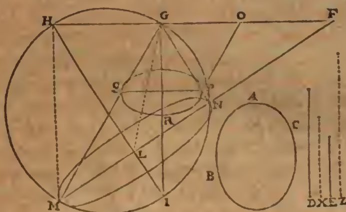
COROLL. II.

Sed & hoc etiam certò constat, In ellipsi ordinatim à sectione

ctione ad axem applicatarum quadrata rectangulis sub conterminis transversi axis partibus non esse æqualia. *Si quidem enim rectangulum DHE quadrato HI, hoc est rectangulo KHL, esset æquale, triangula DHK, LHE essent inuicem similia. Quod absurdum ostensum est.*

PROBL. IV. PROP. XXXIV.

Data ellipsi, conum exhibere cuius sit sectio singularis.

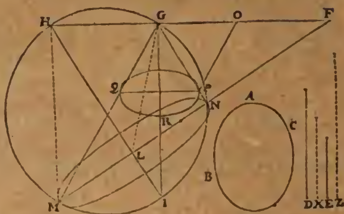


Sit data ellipsis quæcunque BAC, cuius transuersus axis sit D, & contigua recta parameter E. Oporteat conum exhibere, cuius BAC ellipsis sit sectio singularis. Si quidem D sit axis transuersus maior; sumpta inter D & E media proportionali X, fiat vt E ad D, ita X ad Z: erit, ex 34 primi huius, X eiusdem BAC ellipsis minor axis transuersus, & Z ipsi contigua recta parameter.

Exposita igitur recta quæcunque FG producatur in H, vt sit FG ad FH, veluti X ad Z: erectaque perpendiculari GI eiusmodi, vt maior sit GI ad GH ratio, quàm FG ad GI, iungatur HI: descriptæque per tria H, G, I puncta circuli circumferentiæ occurrat in M & N recta FM ad HI ducta perpendicularis: hoc autem fieri posse ex 32 huius jam constat: iunganturque GM, GN: & sumpta in GF, vbi opus producta, recta GO æquali X, ducatur OP æquidistans GM, occurrensque GN, productæ si opus, in P: tum ducta PQ æquidistans sit GF, & occurrat GM in Q. Intelligatur itaque GMN conus, cuius vertex G, basis MN circulus, plano per axem sectus ad rectos basi angulos faciente triangulum MGN, rursus secari plano per rectam PQ ad triangulum MGN recto, formante in superficie sectionem PRQ, cuius sit diameter QP. Dico PRQ sectionem ellipsim esse datæ BAC ellipsi eandem, & in exhibito GMN cono singularem.

Iungatur enim HM: & in quo FM secat HI, sit punctum L: iungaturque GL. Occurrit igitur QP sectionis PRQ diameter productæ MN, quoniam æquidistat GF: & propter exteriorem FGN, hoc est GPQ, angulum æqualem interiori opposito HMN, erit

GPQ angulus maior angulo GMN: quare recta QP basi MN neque æquidistat, neque subcontrariè est posita: sectio igitur QRP, ex definit. & ex anteced. erit ellipsis. Estque vtrumque per PRQ & basis coni planum ad idem per axem triangulum GMN rectum: ideoq; & communis amborum sectio, cui æquidistantes erunt quæ à sectione ad QP diametrum ordinatim applicabuntur, ad vtramque QP, MN erit perpendicularis: diameter igitur QP ellipseos QRP etiam axis erit. Quoniam autem propter æquidistantes GO, PQ, itemque GQ, OP, recta QP rectæ GO, hoc est axi X, est æqualis: & vt X ad Z, ita est GF ad FH, hoc est ita GF quadratum ad GFH, vel MFN, rectangulum: & ita, ex 14 primi huius, QP transuersus axis ad contiguam rectam parametrum; erit & ellipseos QRP recta parameter ipsi QP transuerso axi contigua, æqualis rectæ parametro Z. Quare, per 9 huius, ellipsis QRP ellipsi BAC eadem erit. Rursus, quoniam HLI diameter est circuli, & ad eam perpendicularis MLN, erit ML æqualis LN: estque MLN circuli, qui basis est coni GMN, diameter: quare & L eiusdem circuli centrum erit: & ducta GL eiusdem coni erit axis. Estque GL ad rectam MLN inclinata: conus igitur GMN, ex definit. erit scalenus. Sed &, propter rectam MLN ad diametrum HI perpendicularem, erit arcus MI arcui IN æqualis, ideoq; & angulus MGI angulo IGN etiam æqualis: recta igitur GI angulum MGN bifariam diuidit. Et ei perpendicularis est QP ellipseos QRP diameter: igitur, ex 20 huius, ellipsis QRP, hoc est BAC, exhibiti GMN coni singularis erit sectio. Exhibitus est igitur GMN conus cuius ellipsis BAC sectio est singularis. Quod facere oportebat.



PROBL. V. PROP. XXXV.

Data ellipsi; conum exhibere cuius sit è binis ijsdem & subcontrarijs sectionibus vna.

Sit data ellipsis quæcunque BAC, cuius sit transuersus axis maior D, & contigua recta parameter E.

Expoſita recta quæpiam G F ſecetur in H, vt ſit G F ad F H veluti D ad E: erectaque perpendiculari H I eiuſmodi, vt ſit maior H I ad H G ratio, quàm F H ad H I, iungatur G I, ad quam perpendicularis ducatur F L, deſcriptę per tria G, H, I puncta circuli circunferentiæ occurrens in M & N, hoc enim fieri poſſe conſtat ex 32 huius: iunganturque G M, G N quæ inuicem erunt æquales: & ſumpta in G F recta G O æquali D, ducatur ad G N recta O P æquidiſtans G M: atque etiam P Q æquidiſtans G F: & intelligatur G M N conus rectus, cuius vertex G, baſis M N circulus, iam per axem ſectus plano faciente triangulum M G N, rurſus ſecari plano per rectam P Q ad triangulum M G N recto formante in ſuperficie ſectionem P R Q, cuius ſit diameter recta Q P. Dico ſectionem P R Q ellipſim eſſe propoſitæ B A C ellipſi eandem, & exhibiti G M N coni vnam è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus.

Quoniam enim angulus G P Q, ſiue H G N, hoc eſt, ductâ H M, angulus H M N, minor eſt angulo G M N: æquidiſtatque recta Q P rectæ G F, ideoque & rectæ M N occurrit; non æquidiſtat neque ſubcontrarié eſt poſita recta P Q rectæ M N. Quare, ex definit. & ex 33 huius, ſectio P R Q ellipſis erit. Et quoniam vtrumq; per P R Q & baſis coni planum ad idem per axem triangulum M G N rectum eſt, erit recta P Q ellipſeos P R Q diameter etiam tranſuerſus axis. Sed vt D ad E, ita eſt G F ad F H, hoc eſt ita G F quadratum ad G F H, ſiue M F N, rectangulum, & ita Q P tranſuerſus axis ad contiguam rectam parametrum: eſtque Q P æqualis G O, hoc eſt tranſuerſo axi D: igitur & ellipſeos P R Q recta parameter ellipſeos B A C rectæ parametro etiam æqualis erit. Quare &, per 9 huius, altera alteri ellipſis eadem erit: ideoque & ellipſis P R Q, hoc eſt B A C, exhibiti G M N coni recti, per 19 huius, vna erit è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus.

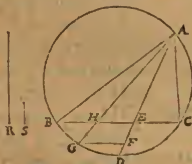
Si quidem conus poſtuletur ſcalenus, cuius propoſita B A C ellipſis vna ſit è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus: datuſque ſit axis tranſuerſus ſiue maior ſiue minor D, eiuſque contigua recta parameter E; expoſita quæcunque recta G F ſecetur aut producatur in H, vt ſit F G ad F H, veluti D ad E: erectaque, altero caſu, perpendiculari H I, vel, altero, perpendiculari G I, eiuſmodi vt ſit maior vtro-

bique perpendicularis HI, vel GI, ad HG ratio, quàm FH vel FG, ad ipſam HI vel GI perpendicularem: &, propter angulum GIF, vel HIF, ex 32 huius; acutum; deſcriptam per tria G, H, I puncta circuli circumferentiam ſecet in L recta FI: iungaturque GL: ſecta autem IL bifariam in M, ſecetur etiam anguli recti ſubſtenſa HI, vel GI, bifariam in K, vt ſit K circuli GHI centrum: junctâque KM & productâ ad circumferentiam in N, iungantur GM, GN. Angulus igitur IGN æqualis erit angulo NGL rectaque GN angulum IGL bifariam ſecabit: & quoniam ad baſim IL non eſt perpendicularis GN, erit triangulum IGL ſcalenum. Sumpta autem in GF recta GO æquali D, ductaque, vt prius, OP æquidiſtante GI, & PQ æquidiſtante GO, quoniam angulus FGL æqualis eſt angulo HIF, erit angulus GIL maior vel minor angulo FGL, hoc eſt GPQ. Recta igitur QP baſi IL non erit ſubcontrariè poſita. Sed neq; erit æquidiſtans, ſiquidem æquidiſtat rectæ GF occurrenti IL: neq; etiam ad rectam GN angulum IGL bifariam ſecantem eſt perpendicularis, quoniam neq; ipſi GN perpendicularis eſt GF: ſi intelligatur itaq; GIL conus ſcalenus, cuius vertex G, baſis IL circulus, per axem ſectus ad rectos baſi angulos plano faciente triangulum IGL, rurſus ſecari per rectam PQ plano ad triangulum IGL recto formante in ſuperficie ſectionem PRQ, cuius ſit diameter PQ; erit vtique PRQ ſectio ellipſis, eiuſdemque axis tranſuerſus recta QP. Oſtendetur igitur, vt prius, ellipſim PRQ ellipſi BAC eandem eſſe &, ex 19 huius, vnam è binis iiſdem & ſubcontrarijs in exhibiti GIL coni ſcaleni ſuperficie ſectionibus. Quare omnino problemati ſic ſatisfactum erit. Quod facere oportebat.

LEMMA X.

Lemma X. Probl. VI. Prop. XXXVI.

A vertice trianguli cuiuſlibet ad eiuſdem baſim ducere rectam cuius quadratum ad rectangulum ſub ſegmentis baſis ab ipſa factis contentum datam teneat rationem.



Oportet autem vt data ratio non minor ſit, quàm ratio quadrati rectę à vertice ad baſim ductæ ipſam pro ratione crurum diuidentis ad rectangulum ſub baſis ſegmentis.

Sit igitur triangulum BAC, cuius vertex A, baſis BC: & data ratio R ad S.

Triangulo BAC circumſcribatur circulus: & ducta AD angulum BAC bifariam diuidens, baſim BC ſecet in E, & circumferentiæ occurrat in D: vtque R ad S, ita fiat AE ad EF: ductaque FG parallela BC, & circumferentiæ occurrente in G, ducatur AG ſecans BC baſim in H. Dico AH eſſe rectam quæſitam: & quadratum AH ſe habere ad rectangulum BHC, vt R ad S.

Quoniam enim vt AE ad EF, hoc eſt vt R ad S, ita eſt AH ad HG, hoc eſt ita AH quadratum ad AHG, ſiue BHC rectangulum; erit vt R ad S, ita AH quadratum ad BHC rectangulum. Quare ducta eſt AH problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

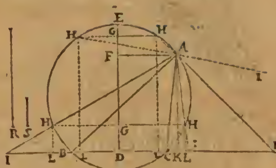
Lemma XI Probl. VII. Prop. XXXVII.

A dati cuiuſlibet trianguli vertice ab baſim productam ducere rectam cuius quadratum ad rectangulum ſub baſe producta, & eius exteriori parte comprehenſum datam teneat rationem.

Oportet autem vt, ſi triangulum iſoſceles eſt, data ratio non ſit equalitatis, neque minoris inæqualitatis: ſin autem ſcalenum eſt, & data ratio ſit minoris inæqualitatis; oportet vt, cum triangulo circumſcribetur circulus, & à vertice trianguli ad baſim perpendicularis deducetur; atq; à bifariam ſectæ baſis puncto perpendicularis ad circumferentiam educetur ad eaſdem verticis partes, data ratio non minor ſit, quàm ratio perpendicularis à vertice deductæ ad perpendicularem à biſectionis puncto eductam.

Sit igitur triangulum quodcunque BAC, & data ratio R ad S. Oporteatque ab A vertice ad BC baſim ducere lineam rectam cuius quadratum ad rectangulum ſub eadem baſe producta & eius exteriori

parte comprehenſum ſe habeat vt R ad S.

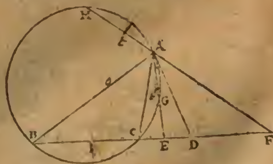


Triangulo BAC circumſcribatur circulus. Si quidem R eſt æqualis S, ducta A I circumferentiam contingens in A problemati ſatisfaciet; ſin autem, ſecta baſi BC bifariam in D, erigatur perpendicularis DE, quæ ad partes verticis A circumferentiæ occurrat in E: ductaque AF perpendiculari ad DE, vt R ad S, ita fiat DF ad DG factaque GH æquidiſtante BC, & circumferentiæ occurrente in H, iuncta AH producatur ad BC productam in I. Dico A I eſſe rectam quæſitam, & quadratum AI ad rectangulum BIC ſe habere vt R ad S.

Cadant enim ad baſim B C perpendiculares AK, HL. Igitur vt A K ad HL, hoc eſt vt DF ad DG, ſiue vt R ad S, ita erit A I ad I H, hoc eſt ita A I quadratum ad AIH, ſiue BIC rectangulum. Quare ducta eſt A I problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

LEMMA XII. PROP. XXXVIII.

Si à vertice cuiuſcunque trianguli ad baſim productam recta agatur quę poſſit rectangulum ſub conterminis baſis partibus contentum; fiet exterior verticalis angulus interiori oppoſito ad baſim ęqualis. At vero ſi rectę à vertice ductę quadratum prædicto rectangulo ſit maius; erit verticalis exterior angulus oppoſito ad baſim interno angulo minor: & recta cuius quadratum minus erit maiorem ſemper externum verticalem conſtituet angulum.



Sit triangulum quodcunque A B C, cuius baſis B C producta ſit ad partes C in D, ita vt ductæ A D quadratum rectangulo B D C ſit ęquale. Dico angulum CAD æquale eſſe angulo A B C.

Triangulo ABC circumſcribatur circulus. Igitur recta D A circumferentiam continget in A: ideoque externus C A D angulus interno oppoſito in alterna circuli portione angulo A B C erit æqualis.

Sit autem ductæ A F quadratum rectangulo B F C minus. Dico angulum CAF maiorem eſſe angulo A B C.

Quoniam enim quadratum A F minus eſt rectangulo B F C, maior erit ratio B F ad F A, quàm A F ad F C: quare angulus A C F minor erit angulo B A F: igitur, propter cōmunem ad F angulum, erit reliquus C A F angulus reliquo A B F, hoc eſt A B C, angulo maior.

Similiterque ſi ductæ A E quadratum maius ſit rectangulo B E C, oſtendetur angulus C A E minor angulo A B C. Quoniam hoc caſu, cum minor ſit ratio B E ad E A quàm A E ad E C, maior erit A C E angulus angulo A B E: ideoque & , propter communem ad E, erit reliquus C A E angulus reliquo A B E, hoc eſt A B C, angulo minor. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. I.

Hinc fit euidens Rectas à vertice trianguli ad baſim productam ductas quarum quadrata rectangulis ſub conterminis baſis partibus non ſunt æqualia, circumſcripti circuli circumferentiam ſecare. Vt, in expoſito diagrammate, rectæ A F, A E circumferentiam B C A ſecant hæc in G, illa in H.

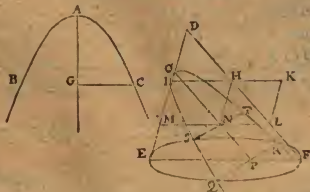
Coroll. II.

Hinc etiam conſtat liquidò Rectarum intra triangulum ductarum rectis à vertice ad baſim productam ductis parallelarum eam ſolam quæ rectæ circumſcriptam circumferentiam contingenti, hoc eſt cuius quadratum rectangulo ſub conterminis baſis partibus ſit æquale, æquidiſtat, baſi trianguli ſubcontrariè eſſe poſitam: reliquas verò minimè.

Probl. VIII. Prop. XXXIX.

Dato cono; exhibere in eius ſuperficie parabolam datæ eandem.

Sit datus D E F conus, cuius vertex D, baſis E F circulus: dataque B A C parabola, cuius axis ſit A G. Oportet in dati D E F coni ſuperficie parabolæ B A C eandem parabolam exhibere.



A quolibet in B A C parabola puncto C ad axem ordinatim duca-

tur C G. Erit igitur angulus A G C rectus. Conus itaque D E F plano secetur per axem ad basim recto faciente triangulum E D F: & in D F, producta si opus est, sumpta D H æquali A G, ducatur I H parallela E F, & producatur ad partes H in K, vt quadrato C G æquale fiat I H K rectangulum: & per K alteri D E lateri parallela agatur K L, occurrens D F in L puncto, à quo ad D E rursus ipsi E F parallela agatur L M, ad quam à puncto H ducatur H N æquidistans D E: & per N agatur N O æquidistans D L, occurrensque D M in O puncto, quod erit idem cum puncto I, si conus DEF sit rectus. Secetur iam rursus idem DEF conus plano per rectam O N ad triangulum E D F recto, quod faciat in superficie sectionem Q O R, cuius sit diameter recta ONP. Erit igitur, propter æquidistantes O P, D F, sectio Q O R parabola, & eius axis recta O N P. Dico itaque parabolam Q O R propositæ B A C parabolæ esse eandem.

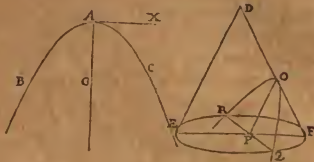
Secetur enim D E F conus plano per rectam M N L basi æquidistante, eiusque & plani per Q O R communis sectio sit recta SNT. Ipsaque S & T puncta sint in coni superficie. Quoniam igitur vtrumque per Q O R & M S L planum ad DEF triangulum est rectum; erit & communis amborum sectio S N T ad idem D E F triangulum recta: ideoq; & ad rectas M N, O N perpendicularis: vterque igitur O N S, M N S angulus erit rectus. Et est punctum S in coni superficie, & in plano per M L basi coni æquidistante, ideoq; & in circuli circumferentia cuius sit diameter M N L, per 2 primi huius: igitur N S quadratum rectangulo M N L, hoc est I H K rectangulo, siue C G quadrato, erit æquale: ideoque & recta S N rectæ C G erit æqualis. Sed & in parallelogrammo N D recta N O rectæ H D, hoc est A G, etiam erit æqualis: estque vterque A G C, O N S angulus rectus: igitur, per 5 huius, parabola Q O R in propositi D E F coni superficie exhibita datæ B A C parabolæ eadem erit. Quare & problemati sic erit satisfactum.

ALITER, ET BREVIVS.

Sit datus idem D E F conus, & proposita eadem BAC parabola, cuius axis sit A G, & recta parameter A X.

Secto DEF cono plano per axem ad basim recto faciente triangulum

lum EDF, fiat vt EF quadratum ad EDF rectangulum, ita AX recta ad rectam DO: ductaque à puncto O ad EF ipsi DE parallela OP, secetur rursus DEF conus plano per rectam OP ad triangulum EDF recto, quod sectionem in superficie faciat curuam lineam QOR, & in base coni rectam QPR. Erit vtique, propter æquidistantes OP, DE, sectio QOR parabola, eiusque diameter OP. Dico itaque parabolam QOR parabolæ BAC esse eandem.

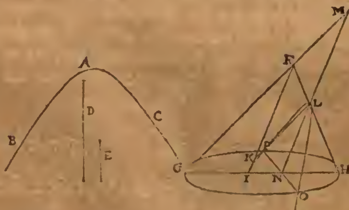


Quoniam enim vtrumque per QOR & basis coni planum ad triangulum EDF rectum est; erit amborum communis sectio recta QPR ad EF basis coni diametrum perpendicularis, & bifariam secta in P: ideoque & QP ad OP diametrum ordinatim erit applicata: quare & parabolæ QOR axis erit OP. Quoniam autem vt EF quadratum ad EDF rectangulum, ita est AX ad DO, & conuersim; erit ipsi AX æqualis, ex 12 primi huius, recta parabolæ QOR parameter: ideoque &, per 8 huius, parabolæ BAC eadem erit QOR parabola in expositi DEF coni superficie exhibita. Quare & sic problemati satisfactum erit.

PROBL. IX. PROP. XL.

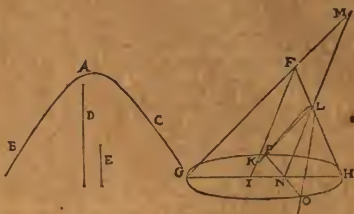
Dato cono; exhibere in eius superficie hyperbolam datæ eandem.

Sit datus FGH conus, cuius vertex F, basis GH circulus: dataque BAC hyperbola, cuius sit axis trãsuersus D, & recta parameter E. Quæraturque in coni FHG superficie hyperbola datæ BAC hyperbolæ eadem.



Oportet autem vt, cum FGH conus plano sectus per axem fuerit ad rectos basi angulos, & à vertice trianguli per axem ad basim

recta ducta fuerit angulum verticis bifariam diuidens, non minor ſit rectanguli ſub baſis partibus ad quadratum biſecantis angulum ratio, quàm rectæ parametri E ad tranſuerſum axem D.



Secetur igitur FHG conus plano per axem faciente triangulum GFH ad baſim coni rectum; & à vertice trianguli F ad baſim GH ducatur, per 36 huius, recta FI cuius quadratum ad rectangulum GIH ſe habeat vt D ad E: & in FI, producta ſi opus eſt, ſumatur FK æqualis D: ducaturque KL parallela FG quæ occurrat FH in L: & per L ducatur MLN æquidiſtans FI: perque ipſam MLN ſecetur rurſus FGH conus plano ad triangulum GFH recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem OLP, & in baſe rectam ONP. Erit vtique OLP ſectio hyperbola, eiuſque tranſuerſa diameter LM. Dico itaque hyperbolam OLP hyperbolæ BAC eſſe eandem.

Quoniam enim vtrumque per OLP & baſis coni planum ad triangulum GFH eſt rectum, erit & amborum communis ſectio recta ONP ad idem triangulum recta: ideoque & ad rectas LN, GN perpendicularis, & bifariam ſecta in N: quare & ON ad LN diametrum ordinatim erit applicata, eritque LN diameter etiam axis. Sed vt FI quadratum ad GIH rectangulum, ita eſt hyperbolæ OLP tranſuerſus axis ML ad rectam parametrum: atque etiam ita tranſuerſus hyperbolæ BAC axis D ad rectam parametrum E: & in parallelogrammo KM recta ML rectæ PK, hoc eſt ipſi tranſuerſo axi D, eſt æqualis: quare & rectæ ſectionum parametri etiam inuicem æquales erunt. Hyperbola igitur OLP in propoſiti FGH coni ſuperficie exhibita, ex 9 huius, datæ BAC hyperbolæ eadem erit. Quare & problemati erit ſatisfactum.

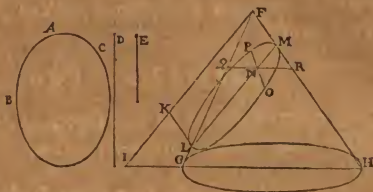
PROBL. X. PROP. XLI.

Dato cono; exhibere in eius ſuperficie datæ ellipſi eandem ellipſim.

Sit datus FGH conus, cuius vertex F, baſis GH circulus: & data BAC ellipſis, cuius axis tranſuerſus ſit D, & contigua recta parame-

ter E. Quæraturque in propoſitâ F G H coni ſuperficie ellipſis datæ B A C ellipſi eadem.

Oportet autem, ſi datus tranſuerſus axis D ſit minor quam E, vt datus FGH conus non ſit rectus, ſed ſcalenus: vtq; eius per axem ſecti ad rectos baſi angulos triangulum ſit eiuſmodi quale in 37 huius preſcriptum eſt. Attamen ſi hoc caſu ſumpta inter E & D media proportionali X, vt E ad D, ita fiat X ad Z; erit, ex 34 primi huius, X eiuſdem B A C ellipſeos maior axis tranſuerſus, & ipſi contigua minor recta parameter Z: nec vlla tunc problema determinatione indigebit.



Sit itaque datus axis tranſuerſus maior D, & contigua recta parameter E.

Secetur FGH conus plano per axem faciente triangulum GFH ad baſim coni rectum: & à vertice F ad baſim GH productam recta ducatur FI, per 37 huius, quæ faciat rationem quadrati FI ad rectangulum GIH eandem quæ D ad E: & in FI, producta ſi opus eſt, ſumpta FK æquali D, ducatur ad FG, vbi opus productam, recta KL parallela FH: & ab L ad FH ipſi FK parallela agatur LM: rurſuſque ſecetur FGH conus plano per LM ad triangulum GFH recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem MOLP. Erit vtique, ex coroll. 2 ad 38, & 1 ad 33 huius, facta in ſuperficie conii ſectio MOLP ellipſis, eiuſque tranſuerſa diameter ML. Dico igitur ellipſim MOLP propoſitæ BAC ellipſi eſſe eandem.

Sumpto enim in ML quolibet puncto N, ducatur per N recta QNR æquidiſtans GH: & per QNR planum agatur baſi coni æquidiſtans, cuius & plani per MOLP communis ſectio ſit recta ONP. Igitur quoniam vtrumque per QOR & MOLP planum ad triangulum GFH eſt rectum; erit & communis amborum ſectio recta ONP ad idem triãgulum recta: ideoq; & recta OP ad vtramque MN, QN perpendicularis erit, & bifariam ſecta in N, atq; ad MNL diametrum ordinatim erit applicata: eritque MNL diameter etiam axis tranſuerſus. Sed vt D ad E, ita eſt FI quadratum ad rectangulum GIH, atque etiam ita ML tranſuerſus axis ad contiguam rectam parametrum: eſtq; in parallelogrammo KM recta ML rectæ FK, hoc eſt tranſuerſo axi D, æqualis: igitur & ellipſeos MOLP contigua tranſuerſo ML axi recta parameter ellipſeos BAC rectę parametro E erit æqualis: &, per 9 huius, ellipſi BAC eadem erit

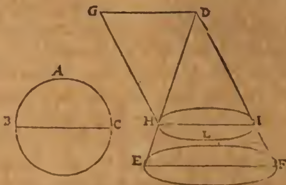
exhibita in propositi FGH coni superficie ellipsis MOLP. Quare & problemati erit satisfactum.

Sed & pro circuli circumferentia problema sequens addere visum est non inutile.

PROBL. XI. PROP. XLII.

Dato cono; exhibere in eius superficie datę circuli circumferentiæ eandem circumferentiam.

Sit datus conus DEF, cuius vertex D, basis EF circulus: & data circuli circumferentia BAC, cuius diameter sit BC.



Secetur DEF conus plano per axem faciente triangulum EDF. Erit igitur EF basis coni diameter. Si igitur EF æqualis est BC; erit basis coni circumferentia datæ BAC circuli circumferentiæ eadem. Sin autem; agatur per D verticem recta DG æquidistans EF, & æqualis BC: & à puncto G ad DE, vbi opus productam, actâ GH parallelâ DF, agatur per H ipsi EF æquidistans HI: seceturque rursus DEF conus per rectam HI plano basi æquidistante. Erit igitur facta in superficie coni sectio circuli circumferentia. Sit illa HLI, eiusque diameter HI. Dico circumferentiam HLI circumferentiæ BAC esse eandem.

Hoc enim propter parallelogrammum GI, ideoque & HI diametrum ęqualem DG, hoc est BC diametro, manifestò constat.

THEOR. XXII. PROP. XLIII.

Si recta linea parabolem altero contingens termino, altero cum axe conueniens, bifariam secetur; quæ per sectionis punctum ipsi perpendicularis ducetur, paraboles vmbilico occurret.

Sit parabola AB, cuius axis AF, ipsamque contingat in B recta BC axi occurrens in C: & sectâ BC bifariam in D, erecta perpendicularis DE, axi AF occurrat in E puncto. Dico punctum E parabolæ AB esse vmbilicum.

Ordinatim

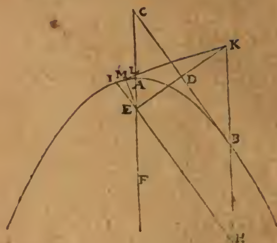
Ordinatim applicetur BG: iungaturque AD. Igitur, propter æquales CD, DB, itemque CA, AG, ex 18 primi huius, erit AD æquidiſtans BG, angulusque CAD erit rectus. Eſtque rectus etiam CDE angulus: igitur vt CA ad AD, ita erit AD ad AE. Sed vt AG ad GB, ita eſt GB ad ſectionis rectam parametrum; eſtque AD dimidiæ GB æqualis: igitur vt CA ad AD, hoc eſt vt AG ad dimidiam GB, ita erit AD ad AE, & ita AD ad quadrantem rectæ parametri. Quadranti igitur rectæ parametri erit æqualis AE: ideoque & punctum E in axe ſectionis ſiue parabolę AB erit, ex definit. vmbilicus. Quod erat demonſtrandum.

THEOR XXIII. PROP. XLIIII.

Si parabolem recta contingat linea, quæ per ſectionis vmbilicum eidem ducetur æquidiſtans, abſcindet à diametro per contactum ducta rectam intra ſectionem æqualem quadranti contiguę parametri.

Sit parabola AB, cuius axis AF, vmbilicus E: ipſamque contingat in B recta BC, cui per E æquidiſtans ducatur EH, occurrens diametro BH in H. Dico BH æqualem eſſe quadranti contiguæ parametri.

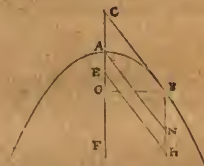
Contingens enim BC axi occurrat in C: ſectâque BC bifariam in D, iungatur ED, & producatur donec diametro HB productæ occurrat in K: productâque HE ad ſectionem in I, iungatur KI axem ſecans in L. Triangulum igitur CDE triangulo BDK ſimile erit & æquale. Quare erit BK æqualis CE, hoc eſt BH. Contingenti autem BC æquidiſtat HI, ideoque & ad BH diametrum ordinatim eſt applicata: ducta igitur IK ſectionem contingit in I. Sed & cum axe conuenit in L: quare, ſectâ IL bifariam in M, quæ à puncto M eidem IL perpendicularis educetur oc-



curret vmbilico E, ex antecedente, eritque EI æqualis EL: ideoque & IH etiam æqualis erit HK, hoc eſt dupla HB. Sed quadrato HI æquale eſt rectangulum ſub HB & contigua parametro: eidemque HI quadrato æquale etiam eſt quadruplum HB quadratum, hoc eſt rectangulum ſub BH rectâ & eiuſdem quadruplâ: æqualis igitur erit quadrupla BH contiguæ parametro. Quare & eiuſdem parametri quadranti erit recta BH æqualis. Quod erat demonſtrandum.

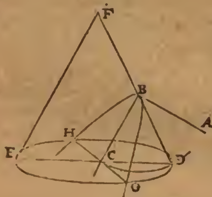
ALITER.

Cotingenti BC æquidiſtans ducatur AN: & ordinatim applicetur BG. Erunt AN, BC, itemque BN, AC inuicem æquales. Sed quadratum BC æquale eſt quadrato BG, hoc eſt rectangulo ex GA in quadruplam AE, & quadrato CG, hoc eſt quadruplo ex CA quadrato: igitur & quadratum NA rectangulo ex GA, hoc eſt BN, in quadruplam AE, & quadruplo CA, hoc eſt BN, quadrato erit æquale. Sed idem NA quadratum æquale eſt rectangulo ſub BN & contigua parametro: igitur rectangulo ſub BN & quadrupla AE, vna cum quadruplo CA, ſiue BN, quadrato, hoc eſt vnico ex BN in quadruplam CE, vel BH, rectangulo æquale erit rectangulum ſub BN & contigua parametro. Quare recta BH quadranti contiguæ parametri erit æqualis. Quod erat demonſtrandum.



PROBL. XII. PROP. XLV.

Datis, positione, duabus rectis lineis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera sit terminata; conum exhibere, & in eius superficie sectionem quę sit parabole, cuius datarum altera sit diameter, altera terminata parameter, & vertex connexionis punctum, cuiusque ordinatę ad eandem diametrum in eodem dato angulo applicentur.



Sint datæ positione binæ A B, B C lineæ rectæ, in dato primùm A B C recto angulo inuicem in B coniunctæ: sitque A B etiam magnitudine data. Oportet conum exhibere, & in eius superficie sectionem quæ sit parabole, cuius diameter sit BC, vertex B, & contigua parameter BA, cuiusque ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicentur, hoc est vt ipsa BC sit quæsitæ sectionis axis, & AB recta parameter.

Si quidem conus postuletur rectus; sumpto in BC quolibet puncto C, centro B & interuallo B C describatur circuli circumferentiæ portio CD, in qua sumpto quolibet alio puncto D, iungatur DC, & producatur in E, vt rectangulo ABC æquale sit rectangulum DCE: iunctaque DB producatur in F, vt ducta EF sit æquidistans B C. Erit igitur DF æqualis FE, quoniam & BD æqualis est BC. Intelligatur itaque FED conus rectus, cuius vertex F, basis ED circulus, plano iam per axem sectus faciente triangulum FED, qui rursus secetur per rectam BC cruri EF æquidistantem, plano ad idem EFD triangulum recto, formante in superficie sectionem GBH. Erit vtique GBH sectio parabola, eiusque diameter eadem recta BC. Dico itaque parabolæ GBH in expositi FED coni superficie exhibitæ rectam parametrum esse AB, verticem B, & BC axem, siue diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, scilicet recto, applicabuntur.

Quoniam enim vtrumque per GBH & basis coni planum ad idem EFD triangulum est rectum, erit amborum communis sectio recta GCH ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque ED, BC perpendicularis, & bifariam secta in C: quare & ad BC diametrum ordinatim erit applicata CG: &, propter angulum BCG rectum, erit BC diameter etiam sectionis axis. Sed &, propter angulum DCG rectum, rectangulo DCE, hoc est ABC,

æquale eſt CG quadratum: parabolæ igitur GBH recta parameter erit BA. Quare exhibitus eſt FED conus rectus, & in eius ſuperficie parabola GBH problemati ſatisfaciens.

Si poſtuletur conus ſcalenus; ſumpto vbilibet puncto D extra rectam BC & circumferentiam centro B interuallo BC deſcriptam, iungetur DC, & producetur in E, vt rectangulo ABC æquale fiat DCE rectangulum: cæteraq; peragentur vt iam dictum eſt. Erit ſiquidem tunc, propter inæquales BC, BD, ideoque & FE, FD, hibitus FED conus ſcalenus.

Non ſit autem iam datus ABC angulus rectus, ſed vel acutus vel obtuſus. Sumantur in BC, vbi opus producta, rectæ BD, BE quadranti ex BA ſigillatim æquales: ductæque DF æquidiſtanti AB perpendicularis ducatur EF, quæ rectam AB, ſaltem productam, ſecet in H: tum per F agatur FG æquidiſtans BC, occurrenſque rectæ BA in G: ductaq; BX perpendiculari ad FG, ſecetur GX bifariam in I: eductaque ad GX perpendiculari IK eiuſmodi vt quadrato BX æquale ſit rectangulum XIK; datis binis rectis lineis IK, IF in dato KIF angulo recto inuicem in I iunctis, quarum IK ſit terminata, exhibeatur, vt iam dictum eſt, conus, & in eius ſuperficie parabola, cuius ſit vertex I, recta parameter IK, & IF axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in dato KIF angulo recto applicentur: ſitque eiuſmodi conus NOM, cuius vertex N, baſis OM circulus, & in eius ſuperficie parabola PIQ, cuius diameter, ſiue axis, ſit IF. Dico parabolam PIQ in ſuperficie NOM coni exhibitam problemati ſatisfacere, & eius etiam verticem eſſe punctum B, parametrum BA, & BC contiguam diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, ſcilicet obliquo, applicabuntur.

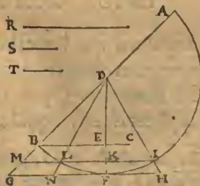
Sit enim NOM coni per axem ſecti triangulum ONM ad baſim coni rectum: planique per PIQ ad triangulum ONM recti & baſis coni communis ſectio ſit recta PLQ. Oſtendetur primò, vt prius, recta PLQ ad vtramque OL & IL perpendicularis, & bifariam ſecta in L, ideoq; & ad IL diametrum, quæ ideo axis erit, ordinatim applicata. Quoniam autem BX perpendicularis eſt ad

IF,

IF, & eius quadrato æquale eſt rectangulum XIK, erit punctum B in parabola cuius ſit vertex I, recta parameter IK, & axis IF: ideoque & recta BX à ſectione ad axem ordinatim erit applicata. Eſt autem IG æqualis IX: recta igitur BG, hoc eſt BA, ſectionem contingit in B. Propter æquidiſtantes autem BD, GF, itemq; BG, DF, & rectam GF rectæ BD, hoc eſt BE, æqualem, erit & BH æqualis HG. Ideoque & recta BG bifariam erit ſecta in H. Eiq; perpendicularis eſt HF: punctum igitur F, ex 43 huius, ſectionis eiuſdem erit vmbilicus. Eſt autem BD axi GF æquidiſtans: diameter igitur erit BD. Et propter FD æquidiſtantem BG, recta BD, ex anteced. æqualis erit quadranti contiguæ parametri. Eſtque AB ipſius BD quadrupla: eiuſdem igitur per puncta B, I deſcriptę ſectionis parameter erit AB ipſi BD diametro contigua. Quoniam autem rectangulo KIL æquale eſt rectangulum MLO, hoc eſt PL quadratum, hoc enim ex priori conſtructione conſtat, erit punctum P in eadem parabola cuius ſit vertex I, & recta parameter IK, atq; axis IF. Quare parabola PIQ in coni NOM ſuperficie exhibita eidem per puncta B, I circa axem IL deſcriptæ parabolæ eadem erit: ipſiuſque etiam vertex erit B, & diameter BC, atq; contigua parameter BA, cui æquidiſtantes erunt quæcunque à ſectione ad BC diametrum ordinatim applicabuntur, ideoque & in ęquali dato ABC angulo, ſcilicet obliquo. Quare & ſic problemati erit ſatisfactum.

LEMMA XIII. PROBL. XIII. PROP. XLVI.

Datis poſitione duabus rectis lineis in dato angulo non recto inuicem iunctis, quarum altera ſit terminata; in eadem producta punctum inuenire, à quo ad circumferentiam ſemicirculi ſuper ipſa deſcripti recta ducatur linea alteri datarum parallela, cuius quadratum ad rectangulum ſub productę partibus puncto inuento & eadem circumferentia interceptis datam teneat rationem:



Sint poſitione datæ AB, BC rectæ lineæ in dato ABC angulo non recto inuicem in B iunctæ: ſit autem AB terminata, & ſuper ipſa deſcriptus AFB ſemicirculus. Oporteatque in AB producta punctum inuenire, à quo recta linea ducatur ipſi BC parallela, & circumferentia ſemicirculi terminata, cuius quadratum ad rectangulum ſub productę AB partibus puncto

inuento & eadem circumferentia interceptis datam R ad S teneat rationem.

Sit primùm R æqualis S. Sectâ igitur A B bifariam in D, ducatur ad BC, productam vbi opus, perpendicularis DE, quæ producta circumferentię occurrat in F: ducaturq; FG æquidiſtans BC, quæ productæ AB occurrat in G. Dico punctum G problemati ſatisfacere. Hoc autem patet, quoniam quadrato FG æquale erit rectangulum A G B.

Sit iam R maior quàm S: ſitq; T æqualis dimidiæ inter R & S differentiæ. Producatur igitur GF ad partes F in H, vt ſit GH ad HF, veluti R ad T: iunctaque D H ſecante circumferentiam in I, ducatur per I ad A B rectam ipſi B C parallela I M. Dico itaque punctum M problemati ſatisfacere, & ſe habere quadratum M I ad rectangulum A M B, veluti R ad S.

Sit enim punctum K in quo perpendicularis D F ſecat rectam M I: & punctum L in quo eadem M I circumferentiam AIB ſecat: ducaturque D L. Quoniam igitur D F eſt ad vtramque BC & M I perpendicularis, erit K L æqualis K I. Cum autem ſit vt G H ad H F, hoc eſt vt R ad T, ita M I ad I K: erit vt R ad duplam T, ſiue ad differentiam inter R & S, ita MI ad IL. Quare vt tota R ad reliquam S, ita erit M I ad M L, hoc eſt ita M I quadratum ad I M L ſiue A M B rectangulum.

At vero ſi R minor ſit quàm S; ſumptâ T æquali dimidiæ inter vtramque differentiæ, ducta F G ſecabitur in N, ita vt ſit GN ad N F, veluti R ad T: nam ducta DN ſecante circumferentiam in L, & per L actâ ipſi B C parallelâ M L I, erit ML ad M I, hoc eſt M L quadratum ad I M L ſiue A M B rectangulum, veluti R ad S. Quare vtroque caſu inuentum erit M punctum problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

THEOR. XXIV. PROP. XLVII.

Si angulum ab hyperboles aſymptotis contentum recta quæpiam ſubtendens linea bifariam ſecetur; ordinatim ad diametrum per bifariæ ſectionis punctum ductam applicatis erit ęquidiſtans.

Sit hyperbola BIO, eiuſque aſymptoti DE, DN, ideoque & centrum D: angulumque EDN ſubtendat recta quæpiam linea GH, quæ bifariam ſecetur in I: ducaturque diameter DI, & producatur

vbi opus. Dico rectam GH ordinatim ad DI diametrum applicatis esse æquidistantem.

Si quidem enim GH hyperbolam BIO contingit in I, iam constat propositum, ex 17 primi huius.

Sin autem GH hyperbolam BIO secat in duobus K, L punctis; quoniam LH æqualis erit GK, ex 39 primi huius, erit & reliqua IL reliquę KI æqualis: ideoque & ipsa KL, hoc est GH, ad DI diametrum ordinatim erit applicata.

Non secet iam, neque contingat recta GH hyperbolam BIO. A sumpto quolibet in sectione puncto B ducatur ipsi GH æquidistans BO quæ sectioni occurrat in O, (nisi ipsam contingat in B, quo casu etiam vtraq; GH, BO ordinatim applicatis erit æquidistans) & asymptotis DE, DN occurrat in E, & N, & diametro DI in M. Erit igitur MN æqualis EM. Sed & ON, ex eadem 39 primi huius, æqualis erit EB: quare & reliqua MO reliquę BM erit æqualis: ideoque & vtraque BM, OM, à sectione ad DM diametrum erit ordinatim applicata. Et eisdem ęquidistat GH: constat igitur propositum. Quod erat demonstrandum.

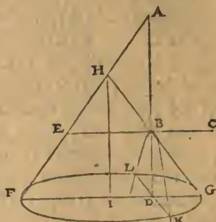
PROBL. XIIII. PROP. XLVIII.

Datis positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera sit vltra connexionem producta; conum exhibere, & in eius superficie sectionem quæ sit hyperbole, cuius datæ primùm lineę sint altera transuersa diameter, altera terminata parameter, & vertex connexionis punctum, atque producta diameter ad quam ordinatę in eodem dato angulo applicentur.

Sint positione & magnitudine datæ binæ AB, BC rectæ lineæ inuicem in dato ABC angulo coniunctæ, quarum AB sit producta ad partes B in D. Oportet conum exhibere, & in eius superficie sectionem quæ sit hyperbole, cuius transuersa diameter sit AB, contigua parameter BC, vertexque B, & BD diameter ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo applicentur. Sitque datus primùm ABC angulus rectus.

Prima methodus pro singulari sectione in cono recto.

Producatur CB in E, vt sit BE media inter AB, BC proportionalis: iungaturq; AE, & producatur in F, vt ducta DF sit ipsi BC æquidistans: anguloq; FAD æqualis fiat DBG angulus: productaq; FD in G, producatur & GB ad rectam AF in H. Propter æquales igitur ad A & B angulos, & vtrumque ad D rectum, erit angulus BGD angulo AFG æqualis: quare & recta HG rectæ HF æqualis erit. Intelligatur itaque HFG conus rectus, cuius vertex H, basis FG circulus, plano iam per axem sectus faciente triangulum FHG, rursus per rectam ABD



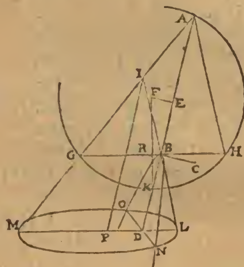
cruri HF vltra verticem H occurrentem secari plano ad triangulum FHG recto, formante in superficie sectionem KBL. Erit vtique KBL sectio hyperbola, eiusque vertex B, & diameter BD. Dico itaque hyperbolæ KBL transuersum axem esse AB, & rectam parametrum BC, ideoque & verticem B, ac BD axem siue diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, scilicet recto, applicabuntur: ipsamque KBL hyperbolam expositi HFG coni recti sectionem esse singularem.

Ducatur HI æquidistans ABD. Quoniam igitur vtrumque per KBL & basis coni planum ad triangulum FHG rectum est, erit & communis amborum sectio, scilicet recta KDL, ad idem triangulum recta: ideoque & ad vtramque FG, BD perpendicularis, & bifariam secta in D: quare & ad diametrum BD ordinatim erit applicata. Diameter igitur BD axis erit sectionis. Quare & BA eiusdem sectionis erit axis transuersus. Quoniam autem FG æquidistat BC, erit FG ad vtramque BD, HI perpendicularis: & propter æquales FH, HG, erit & FI æqualis IG. Quare vt AB ad BE, ita erit HI ad IF, & ita HI ad IG: ideoq; vt quadratum AB ad BE quadratum, hoc est vt AB ad BC, ita erit HI quadratum ad FI quadratum, siue ad FIG rectangulum. Hyperbolæ igitur KBL etiam recta parameter erit BC. Sed & HI angulum FHG bifariam diuidit: & ei æquidistat BD sectionis axis: quare, ex 18 huius, hyperbola KBL in HFG coni superficie singularis erit sectio. Exhibitus est igitur HFG conus rectus, & in eius superficie hyperbola KBL singularis sectio, cuius sit transuersus axis AB, recta parameter BC, vertexq; B, & BD axis, siue diameter ad quam ordinatę in ęquali dato ABC angulo, hoc est recto, applicabuntur. Quod facere oportebat.

Secunda

Secunda methodus pro ſingulari ſectione in cono ſcaleno.

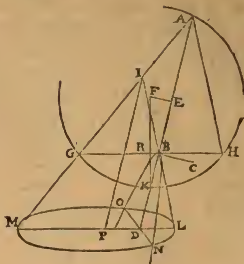
Sint datę, vt prius, binæ rectæ lineæ A B, B C in dato A B C angulo recto: ſitque AB producta in D. Oporteat conum exhibere ſcalenum, & in eius ſuperficie ſingularem hyperbolam, cuius tranſuerſus axis ſit A B, recta parameter B C, ideoque & vertex B, & B D axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in eodem dato A B C angulo recto applicabuntur.



Sumatur in B D, productâ vbi opus, recta B K æqualis BC: ſecteq; AK bifariam in E, erigatur perpendicularis quantacunq; E F: & centro F, interuallo F A deſcribatur circuli circumferentia G K A: ductæq; FK, & ad partes F vbi opus productæ, fiat per B perpendicularis G B H, quæ circumferentiæ occurrat in G & H, rectamque FK ſecet in R: ductiſq; AG, AH, ducatur per B ipſi A H parallela I B, rectæ AG occurrens in I: & per D ducatur M D L recta æquidiſtans GH, ipſiſque AG, IB, vbi opus productis, occurrens in M & L. Quoniam igitur FK per centrum tranſit, & ad eam perpendicularis eſt GH, erit arcus G K arcui K H æqualis: ideoque & angulus GAK, hoc eſt GAB, æqualis angulo B A H: & vt G B ad B H, ita erit GA ad AH. Maiorque vel minor eſt GB quàm BH, quoniam & GR eſt æqualis R H: maior igitur vel minor erit & G A quàm A H: ideoq; & G A H triangulum ad baſim G H erit ſcalenum: quare & ei ſimile MIL triangulum ad baſim M L etiam ſcalenum erit. Intelligatur itaq; IML conus ſcalenus, cuius vertex I, baſis ML circulus, plano iam per axem ſectus faciente triangulum MIL ad baſim coni rectum, qui rurſus ſecetur per rectam ABD cruri MI vltra verticem occurrentem plano ad triangulum MIL recto, formante in ſuperficie ſectionem NBO. Erit vtiq; ſectio NBO hyperbola, eiuſq; vertex B, & diameter B D. Dico igitur hyperbolam N B O in exhibiti I M L coni ſcaleni ſuperficie ſingularem eſſe ſectionem: eiuſque tranſuerſum axem eſſe AB, rectam parametrum B C, verticem B, & BD axem, ſiue diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato A B C angulo recto applicabuntur.

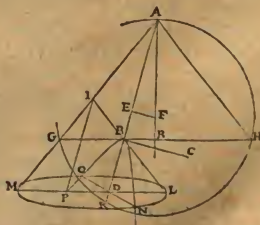
Ducatur enim IP ęquidiſtans BD. Erit igitur MIP angulus angulo P I L æqualis, quoniam & GAB æqualis eſt B A H: recta

igitur IP verticis angulum MIL bifariam diuidit. Et ei æquidiſtat BD ſectionis NBO diameter: ſectio igitur NBO in expoſiti IML coni ſcaleni ſuperficie, per 18 huius, erit ſingularis. Quoniam autem vtrumque per NBO & baſis coni planum ad triangulum MIL rectum eſt, erit amborum communis ſectio recta NDO ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque ML, BD perpendicularis, & bifariam ſecta in D: quare & ad BD ſectionis diametrum ordinatim erit applicata. Axis igitur ſectionis erit BD: ideoque & AB eiuſdem tranſuerſus erit axis. Quoniam autem & ML æquidiſtat GH, vt IP ad PM, ita erit AB ad BG: & vt IP ad PL, ita erit AB ad BH: quare vt IP quadratum ad MPL rectangulum, ita erit AB quadratum ad GBH, vel ABK rectangulum, & ita AB ad BK, vel BC. Eiuſdem igitur NBO ſectionis etiam recta parameter erit BC, ideoque & vertex B, & BD axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, ſcilicet recto, applicabuntur. Quare & hoc etiam caſu problemati ſic ſatisfactum erit.



Tertia methodus pro binis iiſdem & ſubcontrariis ſectionibus in cono recto.

Sint datæ rurſus binæ AB, BC rectæ lineæ angulum facientes ABC rectum: productaque ſit AB in D: & oporteat conum exhibere rectum, & in eius ſuperficie hyperbolam vnam è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus, cuius AB tranſuerſus ſit axis, recta parameter BC, & vertex B, atq; BD diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicentur.



Sumpta, vt prius, recta BK æquali BC, ſectaque AK bifariam in E, excitetur perpendicularis quantacunque EF: centroque F & interuallo FK deſcri-

batur circuli circumferentia GKA: iunctæque AF, & vbi opus productæ, perpendicularis per B ducatur recta GBH, quæ circumferentiæ occurrat in G & H, rectamque AF secet in R: ductisque AG, AH, ducatur per B ipsi AH æquidistans IB, rectæque AG occurrens in I: & per D ducatur MDL æquidistans GH, rectisque AG, IB, vbi opus productis, occurrens in M & L. Quoniam igitur AFR per centrum transit, & ad eam perpendicularis est GRH, erit GR æqualis RH, ideoque & AG æqualis AH. Triangulum igitur GAH isosceles erit: quare & eidem simile triangulum MIL etiam erit isosceles. Intelligatur itaque IML conus rectus, cuius vertex I, basis ML circulus, plano per axem sectus faciente triangulum MIL, rursus per rectam ABD cruri MI vltra verticem occurrentem secari plano ad triangulum MIL recto formante in superficie sectionem NBO. Erit igitur sectio NBO hyperbola, eiusque diameter BD. Dico iam hyperbolam NBO coni IML sectionem esse è binis iisdem & subcontrarijs vnam: eiusque transuersum axem esse AB, rectam parametrum BC, verticem B, & BD axem, siue diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicabuntur.

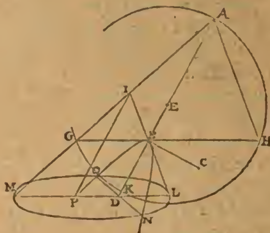
Ducatur enim IP æquidistans BD. Quoniam igitur angulus GAB minor est angulo BAH, vel etiam maior, si perpendicularis EF educta sit ad partes BG; erit & MIP angulus etiam angulo PIL maior, vel minor: non diuidet igitur recta IP diametro BD æquidistans angulum verticis MIL bifariam: quare, ex 17 huius, hyperbolæ NBO in expositi IML coni superficie exhibitæ altera in eadem superficie hyperbola subcontrariè erit posita. E binis igitur ijsdem & subcontrarijs sectionibus erit vna NBO hyperbola. Quoniam autem vtrumque per NBO & basis coni planum ad idem MIL triangulum est rectum, ostendetur, vt supra, recta NDO communis eorumdem planorum sectio perpendicularis ad BD, & bifariam secta in D, ideoque & ad diametrum BD ordinatim applicata: quare & sectionis NBO axis erit BD, & recta AB eiusdem erit axis transuersus. Sed vt IP ad PM, ita erit AB ad BG: vtq; IP ad PL, ita erit AB ad BH: igitur vt IP quadratum ad MPL rectangulum, ita erit AB quadratum ad GBH hoc est ABK, rectangulum, & ita AB ad BK, vel BC. Itaque & BC eiusdem NBO sectionis siue hyperbolæ erit recta parameter, ideoque & B vertex, & BD axis, siue diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicabuntur. Exhibitus est igitur IML conus rectus, & in eius superficie NBO hyperbola problemati satisfaciens.

Quarta methodus pro binis sectionibus in cono scaleno.

Oporteat igitur etiam in coni scaleni superficie hyperbolem ex-

hibere è binis iiſdem & ſubcontrarijs vnam, cuius ſit AB tranſuerſus axis, BC recta parameter, B vertex, & BD diameter ad quam ordinatæ in dato ABC angulo recto applicentur

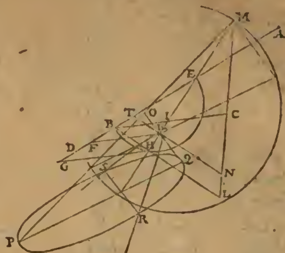
Sumpta adhuc, vt priùs, recta BK æquali BC, & ſecta AK bifariam in E, centro E interuallo EK deſcribetur circuli circumferentia GKA, cui in G & H occurret recta GH per B ducta ad AB non perpendicularis: ductiſque, vt iam factum eſt, rectis AG, AH, itemque IBL, MDL, quoniam AB per centrum tranſit, erit GAK, hoc eſt GHK, angulus angulo BAH, ſiue KGH, maior vel minor: ideoque & reliquus GHA angulus etiam reliquo AGH angulo maior vel minor: & recta AG maior minorue quàm AH. Quare triangulum GAH ad baſim GH erit ſcalenum, ideoque & eidem ſimile MIL triangulum etiam ad baſim ML ſcalenum erit. Intelligetur itaque IML conus ſcalenus plano iam per axem ſectus faciente triangulum MIL ad baſim coni rectum, rurſus per rectam ABD ſecari plano ad idem MIL triangulum recto formante in ſuperficie hyperbolam NBO, cuius ſit diameter BD: oſtendeturque, vt ſupra, ducta IP æquidiſtante ABD, propter angulum MIP maiorem, minoremue angulo PIL, hyperbolam NBO, ex eadem 17 huius, vnam eſſe è binis iiſdem & ſubcontrariis exhibiti MIL coni ſectionibus: ipſiuſque axem tranſuerſum eſſe AB, rectam parametrum BC, verticem B, & BD axem, ſiue diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicabuntur: & ſic etiam problemati ſatisfactum probabitur.



Problematis conſtructio non exiſtente ABC angulo recto ſed obliquo.

Non ſint iam datę AB, BC rectæ lineæ in angulo ABC recto ſed obliquo. Oporteatque, productâ AB in D, conum exhibere, & in eius ſuperficie hyperbolam, cuius AB ſit tranſuerſa diameter, BC contigua parameter, B vertex, & BD diameter ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo applicentur. Secetur AB bifariam in E: & circa diametrum EB deſcribatur ſemicirculus BHE: productaque EB diametro, ducatur, per 46 huius, recta GH æquidiſtans BC, circumferentiæque occurrens

occurrens in H, cuius quadratum ad rectangulum EGB se habeat vt BC ad BA. Iunctâque EH quæ rectam BC, vbi opus productam, secet in I, ipsarum EH, EI media proportionalis ponatur EK: iungaturque BH, & producatur in L, vt quadrato BH æquale sit rectangulum KHL: productâque KE in M, vt sit EM æqualis EK, iungatur ML, ad quam per K ducatur KN æquidistans BL. Erit igitur, propter angulum BHE rectum, recta KN ad MK perpendicularis. Datis itaque



positione duabus MK, KN rectis lineis terminatis, in dato MKN angulo recto inuicem iunctis, quarum MK sit ad partes K producta in H, exhibeatur, vt iam dictum est, conus quilibet, & in eius superficie hyperbola, cuius sit MK transuersus axis, KN recta parameter, vertex K, & KH axis, siue diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicentur. Sitque conus eiusmodi OPQ, cuius vertex O, basis PQ circulus, & in eius superficie exhibita RKS hyperbola. Dico hyperbolam RKS problemati satisfacere: eiusque etiam transuersam diametrum esse AB, contiguam parametrum BC, verticem B, & BD diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo obliquo applicabuntur.

Ducatur KF æquidistans GH, & producatur NK in T. Quoniam igitur BL æquidistat KN, & productæ MN occurrit in L, rectanguloque KHL æquale est quadratum HB, erit, ex 2. secundi huius, punctum B in eadem hyperbola cuius sit MK transuersus axis, & KN recta parameter: eritque BH à sectione ad axem KH ordinatim applicata. Propter æquales autem EK, EM, est E sectionis centrum: recta igitur AEB eiusdem etiam sectionis transuersa erit diameter. Quadrato autem EK æquale est rectangulum HEI: recta igitur BI sectionem contingit in B. Et ei æquidistat KF: ordinatim igitur à sectione ad BD diametrum applicata est KF. Sed vt GH ad GE, ita est FK ad FE: & vt GH ad GB, ita est FK ad FT: igitur vt GH quadratum ad EGB rectangulum, hoc est vt BC ad BA, ita erit FK quadratum ad EFT, hoc est, propter contingentem KT, ex 25 primi huius, AFB rectangulum: & ita parameter ad contiguam transuersam

diametrum. Existente igitur A B transuersa diametro hyperbolæ per puncta B, K circa K H axem descriptæ, & vertice B, erit B C contigua parameter, siue iuxta quam poterunt à sectione ad B D diametrum ordinatim ductæ, quæ & ipsi B C æquidistantes erunt, ideoque & in angulo ipsi dato A B C æquali applicatæ. Quare cum vtriusque & R K S, & per B, K puncta circa axem K H descriptæ hyperbolæ idem sit axis transuersus K M, eademque recta parameter K N, erit altera alteri hyperbola eadem. Exhibitus est igitur O P Q conus, & in eius superficie hyperbola R K S, cuius etiam A B sit transuersa diameter, B C contigua parameter, B vertex, & B D diameter ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur. Quod facere & demonstrare oportebat.

Aliter, existente adhuc angulo ABC obliquo.

Sint rursus datæ, vt supra, binæ A B, B C rectæ lineæ, in dato A B C angulo obliquo.

Diuisâ A B bifariam in E, sumatur in B C recta B F quæ possit quadrantem figuræ sub A B, BC: positaque B G æquali & in directum BF, iungantur E F, E G: sectoque bifariam G E F angulo per rectam E H quæ secet B C, aut B G, in I, ducatur ad E H perpendicularis B H: sumptaque E K ipsarum E H, E I media proportionali, ducatur ad E F, productam vbi opus, aut ad E G, recta K L æquidistans B H: & vt E K quadratum ad K L quadratum, ita sit dupla E K, hoc est M K, ad K N. Datis itaque duabus M K, K N rectis lineis terminatis, in dato M K N angulo recto

inuicem iunctis, quarum MK sit producta in H, exhibeatur, vt iam dictum est, conus quilibet OPQ, & in eius superficie hyperbola RKS, cuius vertex sit K, transuersus axis MK, & recta parameter KN, atque KH axis, siue diameter ad quam ordinatæ in eodem dato MKN angulo recto applicentur. Dico hyperbolam RKS problemati satisfacere, eiusdemque etiam diametrum transuersam esse AB, & contiguam parametrum BC, ac verticem B, & BD diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur.

Ducatur ad BD rectæ BC æquidistans KX: & in quo KL secat AB sit punctum V. Quoniam igitur vt MK ad KN, hoc est vt MK quadratum ad rectangulum MKN, ita est EK quadratum ad KL quadratum: cum sit EK dimidia MK, erit KL quadratum rectanguli MKN quadrans. Quare hyperbolæ cuius sit MK transuersus axis, & KN recta parameter, vertexque K, & centrum E, hoc est hyperbolæ RKS, erit asymptotos EL: productâque LK ad rectam EF in T, propter æquales ad E angulos, & vtrumque ad K rectum, erit KT æqualis KL: quare & eiusdem RKS hyperbolæ asymptotos etiam erit ET. Angulum autem LET subtendit recta GBF bifariam secta in B: igitur, ex antecedente, recta GF ad EB diametrum ordinatim applicatis erit æquidistans. Et ei æquidistat KX: punctumque K in sectione est: recta igitur KX à sectione ad BX, hoc est BD, diametrum ordinatim erit applicata. Sed & sectionem contingit in K recta KL diametro EB occurrens in V: & vt HE ad EK, ita est BE ad EV: vtque KE ad EI, ita etiam est XE ad EB: ideoque vt XE ad EB, ita est BE ad EV: erit igitur punctum B sectionis vertex: ideoque & dupla EB, hoc est AB, transuersa diameter: rectaque BF sectionem continget in B: & propter EG, EF asymptotos, vt EB quadratum ad BF quadratum, siue ad quadrantem figuræ sub AB, BC, ita erit AB transuersa diameter ad contiguam parametrum, & ita AB ad BC. Quare & sectionis siue hyperbolæ per puncta B, K circa axem KH descriptæ, & hyperbolę RKS in coni OPQ superficie exhibitæ eadem erit parameter BC transuersę diametro AB contigua. Exhibitus igitur est OPQ conus, & in eius superficie hyperbola RKS descriptæ per puncta B, K circa axem KH & asymptotos EL, ET hyperbolæ eadem, cuius sit transuersa diameter AB, contigua parameter BC, vertex B, & BD diameter ad quam ordinatæ ipsi BC æquidistantes in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur. Quare omnimodè problemati erit satisfactum. Quod erat propositum.

LEMMA. XIV. PROBL. XV. PROP. XLIX.

Datis positione duabus rectis lineis in dato quocunque angulo non recto inuicem iunctis, quarum altera terminata circuli sit diameter; inuenire in eiusdem circuli circumferentia punctum à quo ad eandem diametrum recta ducatur alteri datarum parallela, cuius quadratum ad rectangulum sub diametri partibus ab ipsa factis datam teneat rationem.

Sint datæ A B, B C rectæ lineæ in dato A B C angulo obliquo: & sit A B circuli diameter. Oporteatque in circumferentia circuli super A B descripti punctum inuenire, à quo ad A B diametrum recta ducatur alteri B C parallela, cuius quadratum ad rectangulum sub partibus in A B factis se habeat vt R ad S.

Si quidem data ratio sit æqualitatis, hoc est si R sit æqualis S; ducta per D centrum recta æquidistans B C dabit in circumferentia circuli bina puncta quæ problemati satisfacient. Hoc enim liquidò constat.

Sit autem R maior quàm S. Posita T æquali dimidiæ inter vtramque differentiæ, sectâque A B bifariam in D, ducatur ad B C, vbi opus productam, perpendicularis D E, quæ ad circumferentiam producatur in F: ducaturque F G parallela B C, occurrensque A B productæ in G: & vt T ad S, ita fiat F G ad G H: iunctaque H D ad circumferentiam producatur in I: agaturque I K ipsi B C parallela, diametrum A B secans in L, & circumferentiæ occurrens in K. Dico punctum K problemati satisfacere, & quadratum K L se habere ad rectangulum A L B, vt R ad S.

Iungatur enim K D, & producatur ad H F productam in M. Quoniam igitur, propter æquales ad I & K angulos, angulus F M D angulo F H D est æqualis, erit & M F recta rectæ F H æqualis: ideoque & recta M G rectæ G H, & duplæ F G æqualis erit. Igitur vt dupla T & S ad S, hoc est vt R ad S, ita erit M G ad G H: & ita K L ad L I: atque etiam ita K L quadratum ad K L I, hoc est A L B rectangulum. Punctum igitur K hoc casu problemati satisfacit.

At si

At ſit R ſit minor quàm S; ſumptâ, vt prius, T dimidiâ inter vtramque differentiâ, fiet vt T ad R, ita FG ad GH: ductaque HD in I dabit punctum I quæſitum: eritque IL ad LK, hoc eſt IL quadratum ad ILK, ſiue ALB rectangulum, vt GH ad GM, hoc eſt vt R ad S. Inuentum eſt igitur vniuerſe punctum problemati ſatisfaciens. Quod facere & demonſtrare oportebat.

PROBL. XVI. PROP. L.

Datis poſitione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis; conum exhibere, & in eius ſuperficie ſectionem quæ ſit ellipſis, cuius vertex ſit punctum ad angulum, & datarum linearum altera parameter, altera contigua tranſuerſa diameter ad quam ordinatæ in eodem dato angulo applicentur.

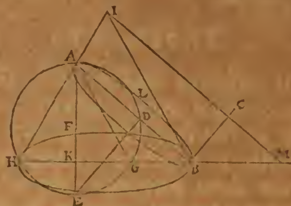
Oportet autem vt, ſi datus angulus ſit rectus, datæ lineæ non ſint inuicem æquales: ſecus enim problema eſſet impoſſibile.

Sint igitur datæ binæ AB, BC rectæ lineæ in dato primùm ABC angulo recto inuicem coniunctæ, & inæquales inuicem. Oporteatque exhibere conum, in cuius ſuperficie ſit ellipſis circa AB tranſuerſam diametrum poſita, cuius vertex ſit B, & contigua parameter BC, & in qua à ſectione ad AB diametrum ordinatim ductæ in eodem ABC recto angulo applicentur.

Prima methodus pro duplici ſubcontraria ſectione in cono recto, ſi AB maior ſit, quàm BC.

Sumatur in AB recta BD æqualis BC: erectaque perpendiculari DE eiuſmodi, vt ſit maior DE ad DA ratio, quàm BD ad DE, iungatur AE, & bifariam ſecetur in F: deſcriptamque centro F circa diametrum AE, circuli circumferentiam ſecet in G & H recta BGH per B ducta ad AE perpendicularis, ipſamque ſecans in K: (ſecabit enim, quoniam ductâ EB, erit, ex 32 huius,

AEB angulus acutus:) iunctisque AH, AG, ducatur per B ipsi AG æquidistans BI, productæ HA occurrens in I. Propter æquales igitur HAE, EAG angulos, & vtrumque ad K rectum, erit AG æqualis AH: ideoque & IB æqualis IH: & angulus HBI angulo BHI æqualis: quare & angulus BHI maior erit angulo ABI: ideoque neque æquidistans erit, neque subcontrariè posita recta AB rectæ HB. Intelligatur itaque IHB conus rectus, cuius vertex I, basis HB circulus, plano sectus per axem faciente triangulum HIB, rursus per lineam AB vtrique HI, IB cruri infra verticem occurrentem secari plano ad triangulum HIB recto, formante in superficie sectionem ALB. Erit vtique ALB sectio ellipsis, eiusque transuersa diameter AB. Dico igitur ellipsim ALB in coni IHB superficie exhibitam problemati satisfacere: eiusque transuersum axem esse AB, rectam parametrum BC, & verticem B: ideoque & à sectione ad AB diametrum ordinatas in dato ABC angulo recto applicari.



Ducatur enim IM æquidistans AB. Quoniam igitur vtrumque per ALB & basis coni planum ad triangulum HIB est rectum, erit & amborum communis sectio ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque AB, HB perpendicularis, & HB circuli circumferentiam continget in B: quare &, per 15 primi huius, coni IHB superficiem, ideoq; & ellipsim ALB in ipso B puncto continget, &, per coroll. 2 ad 17 primi huius, erit ad AB diametrum ordinatim applicatis æquidistans. Itaq; & ad AB diametrum ordinatim ductæ in angulo recto applicabũtur. Ellipseos igitur ALB axis transuersus erit AB. Quoniam autem angulus ADE est rectus, circumferentia circa diametrum AE descripta transibit per D: & rectangulo HBG æquale erit ABD, hoc est ABC rectangulum: vtque AB quadratum ad ABD, siue HBG rectangulum, ita erit AB ad BD, vel BC. Sed vt AB ad BH, & AB ad BG, ita est IM ad MH, & IM ad MB: ideoque vt AB quadratum ad HBG rectangulum, ita est IM quadratum ad HMB rectangulum: igitur vt IM quadratum ad HMB rectangulum, ita erit AB ad BC. Quare BC ellipseos ALB recta erit parameter, & vertex B, atque AB axis, siue diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicabuntur. Sed & quoniam

IHB conus rectus est, erit ex 19 huius, in eius superficie exhibita ALB ellipsis è binis iisdem & subcontrariis sectionibus vna. Exhibitus est igitur IHB conus rectus, & in eius superficie ALB ellipsis problemati satisfaciens.

Secunda methodus pro singulari sectione in cono scaleno. Quando nempe AB minor fuerit quàm BC.

Sint rursus datæ AB, BC in dato ABC angulo recto: sitque AB minor quàm BC.

Producatur BA in D, vt sit BD æqualis BC: erectaque perpendiculari AE, quæ maiorem habeat ad AD rationem quàm BA ad AE, iungatur DE: descriptamque circa DE diametrum circuli circumferentiam secet in H & G recta BGH ducta ad DE perpendicularis: iunctisque AH, AG, ducatur BI æquidistans AG, occurrensque HA productæ in I. Triangulum igitur HIB triangulo HAG simile erit. Sed propter æquales DH, DG arcus, ideoque & HA arcum maiorem arcu AG, erit AH recta maior quàm AG: ideoque & HI maior quàm IB: triangulum igitur HIB ad basim HB erit scalenum. Ducta autem IL perpendiculari ad AB, quoniam & AE eidem perpendicularis est, & sunt HAE, EAG anguli æquales, erit & AIL angulus angulo LIB æqualis: ideoque & IAB angulus angulo IBA æqualis erit, & angulus IBA maior angulo IHB. Recta igitur AB basi HB neque æquidistans erit, neque subcontrariè posita. Intelligatur itaque IHB conus scalenus, cuius vertex A, basis HB circulus, plano sectus per axem faciente triangulum HIB ad basim coni rectum, rursus per rectam AB secari plano ad triangulum HIB recto, formante in superficie ellipsim AKB cuius sit diameter AB. Dico ellipsim AKB in expositi IHB coni scaleni superficie exhibitam problemati satisfacere.

Ostendetur siquidem, vt in superiori demonstratione, ellipsis AKB transuersum axem esse AB, & rectam parametrum BC, ac verticem B, ideoque & à sectione ad diametrum AB ordinatas

in angulo recto applicari. Quoniam autem & recta IL angulum HIB bifariam diuidit, & ei perpendicularis eſt AB ſectionis AKB diameter; erit, per 20 huius, ellipſis AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie ſectio ſingularis, ideoque & problemati ſatisfaciens.

Tertia methodus pro duplici ſubcontraria ſectione in cono ſcaleno, exiſtente AB maiore vel minore quàm BC

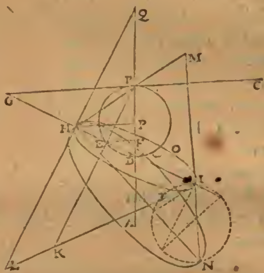
Sint denique datæ AB, BC in angulo ABC recto: ſitque AB maior, vel minor, quàm BC.

Secetur AB (ſi maior ſit, vt in 1ª. fig.) vel producatur, (ſi minor, vt in 2ª.) in D vt ſit BD æqualis BC: erectaque perpendiculari DE, in 1ª. vel AE, in 2ª. fig. iungatur in 1ª. AE, vel in 2ª. DE, ad quas obliquè ducatur recta BGH circuli circumferentiæ per D, A, E puncta deſcriptæ occurrens in G & H: iunctiſque HA, AG ducatur BI æquidiſtans AG, occurrenſque HA productæ in I: iungaturque DG. Igitur propter HE, EG arcus inæquales, erunt in 1ª. fig. rectæ HA, AG etiam inæquales: ideoque & HI maior vel minor erit quàm IB: & in 2ª. cum ſit angulus AHG minor angulo DHG, hoc eſt GAB: ſitque GAB angulus angulo AGH minor: erit & angulo AGH multo minor AHG angulus: ideoque & recta AH maior erit quàm AG, & HI maior quàm IB: triangulumque HIB vtroque caſu ad HB baſim erit ſcalenum. Sed & angulus GAB, hoc eſt IBA, in 1ª. fig. minor eſt, & in 2ª. maior angulo GDB, hoc eſt IHB: quare recta AB baſi HB neque æquidiſtans erit, neque ſubcontrariè poſita. Intelligatur igitur IHB conus ſcalenus, cuius vertex I, baſis HB circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum HIB ad baſim coni rectum, rurſus per rectam AB ſecari plano ad triangulum HIB recto, formante in ſuperficie ellipſim AKB cuius ſit diameter AB. Dico ellipſim

ellipſim AKB problemati ſatisfacere.

Oſtendetur enim, vt prius, ellipſeos AKB tranſuerſum axem eſſe AB, & rectam parametrum BC, ac verticem B. Sed & neutro caſu recta AB ad biſecantem HIB angulum eſt perpendicularis, (ſiquidem neque AE in 2ª. fig. angulum HAG bifariam diuidit, neque DE in 1ª. ipſum bifariam diuidenti æquidiſtat:) quare, per 17 huius, ellipſis AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie erit exhibita vna è binis iiſdem & ſubcontrariis eiuſdem coni ſectionibus problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

Eiuſdem problematis conſtructio non exiſtente dato ABC angulo recto, ſed obliquo.



Non ſint autem datæ binæ AB, BC rectæ lineæ in angulo recto, ſed obliquo. Oporteatque conum exhibere, & in eius ſuperficie ellipſim circa tranſuerſam diametrum AB poſitam, cuius vertex ſit B, & BC contigua parameter, cui æquidiſtantes ſint quæ à ſectione ad AB diametrum ordinatim, ideoque in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.

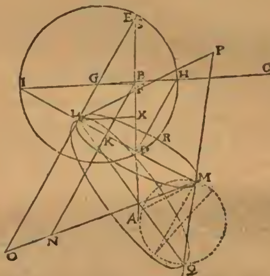
Secetur AB bifariam in D: & circa diametrum BD deſcribatur circuli circumferentia, in qua, per anteced. inueniatur punctum E, à quo ad BD diametrum ducatur recta EF æquidiſtans BC, facienſque rationem quadrati EF ad rectangulum BFD eandem quæ rectæ CB ad rectam BA: iunctaque DE producatur donec rectæ BC, vbi opus productæ, occurrat in G: rectanguloq; GDE æquale ponatur quadratum ex DH: productâq; GD in I, vt ſit DI æqualis DH, iungatur BE, & producatur in K, vt ſit quadrato BE æquale rectangulum HEK: iungaturque IK, & producatur in L, vt ducta HL ſit æquidiſtans EK. Igitur propter angulum BED in ſemicirculo rectum, erit rectus IHL angulus: & propter angulum DBC obliquum, erit & obliquus DBG angulus; ideoque & quadratum BE, hoc eſt rectangulum HEK, rectangulo GED maius erit, vel minus. Quoniam autem vt GD ad DH, ita eſt DH ad DE: &, diuidendo, vt GH ad DH, ita eſt HE ad DE: permutandoq; vt GH ad HE, ita eſt DH,

vel DI, ad DE: componendo, vt GE ad HE, ita erit EI ad DE: rectanguloque GED æquale erit HEI rectangulum: quare & eodem HEI rectangulo maius erit vel minus rectangulum HEK: ideoque & recta EK maior vel minor quàm EI: atque etiam recta HL maior vel minor quàm HI. Datis itaque duabus IH, HL terminatis rectis lineis inæqualibus in dato IHL angulo recto inuicem iunctis, exhibeatur, vt iam dictum est, conus quilibet, & in eius superficie ellipsis circa IH transuersum axem posita, cuius sit H vertex, & HL parameter recta, vt à sectione ad IH diametrum ordinatim ductæ in eodem dato IHL angulo recto applicentur. Sitque conus huiusmodi MHN, cuius vertex M, basis HN circulus, & in eius superficie ellipsis HOI. Dico ellipsim HOI in expositi MHN coni superficie exhibitam problemati satisfacere: eiusque etiam transuersam diametrum esse AB, verticem B, & contiguam parametrum BC, cui æquidistantes erunt quæ a sectione ad AB diametrum ordinatim, ideoque & in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.

Ducta enim HP æquidistante BC, & productâ LH donec productæ AB occurrat in Q, quoniam rectangulo HEK æquale est quadratum BE; erit recta BE à sectione, siue ellipsi cuius sit IH transuersus axis, & recta parameter HL, ad eundem HI axem ordinatim applicata: quare punctum B in eadem sectione erit. Sed &, propter æquales HD, DI, punctum D centrum est sectionis: recta igitur BDA eiusdem erit transuersa diameter. Quadrato autem HD æquale est rectangulum EDG: sectionem igitur, siue ellipsim per H,B,I,A puncta incedentem recta BG contingit in B; quare & ei æquidistans HP erit ab eadem sectione ad diametrum ADB ordinatim applicata. Sed vt BF ad FE, ita est QP ad PH: & vt DF ad FE, ita est DP ad PH: quare vt BFD rectangulum ad FE quadratum, hoc est vt AB ad BC, ita erit QPD, siue, ex 25 primi huius, BPA rectangulum ad PH quadratum. Vt autem BPA rectangulum ad PH quadratum, ita est AB transuersa sectionis diameter ad contiguam parametrum: igitur vt AB transuersa diameter ad contiguam parametrum, ita erit AB ad BC. Quare & BC eiusdem per H,B,I,A sectionis siue ellipseos

parameter erit ipsi AB transuersę diametro contigua. Sed vtriusq; & per H,B,I,A puncta descriptæ, & HOI ellipseos idem est HI transuersus axis, & eadem recta parameter HL: altera igitur alteri ellipsis, ex 9 huius, eadem erit. Quare & HOI ellipsis in expositi MHN coni superficie exhibita problemati satisfaciet: eiusque etiam transuersa diameter erit AB, & contigua parameter BC, ac vertex B: & in ipsa quæ à sectione ad AB diametrum ordinatim ducentur erunt ipsi BC æquidistantes, ideoque & in eodem dato ABC angulo obliquo applicabuntur.

Aliter existente adhuc dato ABC angulo obliquo.



Sint rursus datæ AB, BC in angulo ABC obliquo.

Secetur AB bifariam in D: productâque DB in E, vt sit BE dimidiæ BC æqualis, secetur DE bifariam in F: erectaque perpendiculari FG quæ rectæ BC, vbi opus productæ, occurrat in G, centro G (vel, si AB, BC sint æquales, ipso B puncto vt centro) describatur circuli circumferentia DHE quæ rectam BC, vbi opus productam, secet in H & I: iunganturq; HD, ID: ductaque ad ipsarum alterutram alteri æquidistante recta BK, rectangulo IDK æquale ponatur quadratum ex DL: productâque LD in M, vt sit DM æqualis DL, producatur BK in N, vt sit LKN rectangulum quadrato BK æquale: iungaturque MN, & producatur in O, vt iuncta LO sit æquidistans KN. Erit igitur, propter angulum IDH in semicirculo rectum, etiam & MLO angulus rectus. Sed, vt in superiori demonstratione ostensum est, propter angulum DBI non rectum, quadratum BK, siue rectangulum LKN, rectangulo IKD, hoc est LKM, maius vel minus erit: ideoq; & recta KN maior vel minor quàm KM: & recta LO maior vel minor quàm LM. Datis igitur duabus ML, LO terminatis rectis lineis inæqualibus, in dato MLO angulo recto inuicem iunctis, exhibeatur, vt iam dictum est, conus PLQ, & in eius superficie ellipsis LRM, cuius transuersus axis sit ML, & recta parameter LO, ideoque & vertex vterque M, L. Dico ellipsim LRM in expositi PLQ

coni ſuperficie exhibitam problemati ſatisfacere : & eiuſdem etiam tranſuerſam diametrum eſſe A B , verticem B , & contiguam parametrum B C , cui æquidiſtantes erunt quæcunque ad A B diametrum ordinatim, ideoque in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.

Oſtendetur ſiquidem, vt in ſuperiori demonſtratione factum eſt, ellipſim cuius ſit tranſuerſus axis M L , & recta parameter L O, tranſire per B : rectamq; B C ſectionem contingere in B: & AB eiuſdem eſſe tranſuerſam diametrum. Sed & productâ O L ad diametrum A B in S , & ducta L X æquidiſtante B C , quoniam vt D B ad B E , hoc eſt vt A B ad B C , ita eſt D B quadratum ad D B E , ſiue I B H rectangulum : & vt D B ad B I , ita eſt D X ad X L : vtque D B ad B H, ita eſt S X ad X L : ideoque vt D B quadratum ad I B H rectangulum, ita eſt S X D , hoc eſt, propter contingentem L S , ex 25 primi huius , B X A rectangulum ad X L quadratum, & ita A B tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum : erit & B C eiuſdem per L, B, M, A deſcriptæ ellipſeos parameter ipſi BA tranſuerſæ diametro contigua. Quare cum ellipſis L R M in expoſiti P L Q coni ſuperficie exhibita, propter communem M L tranſuerſum axem , communemque L O rectam parametrum , ipſi per L , B , M , A deſcriptæ ellipſi, ex 9 huius, ſit eadem; & ipſa problemati ſatisfaciet : eiuſdemque etiam tranſuerſa erit diameter A B, contigua parameter BC, ac vertex B, & quæ in ipſa à ſectione ad AB diametrum ordinatim ducentur, in dato eodem A B C angulo obliquo applicabuntur. Quare problemati omnimodè ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.

MONITVM.

Non abs re, neq; inutile fore duximus monuiſſe, nos tria hæc proximè antecedentia problemata ab ipſo olim Apollonio circa Conicorum primi ſui libri finem propoſita hìc inculcaſſe, quanquam aliter paulò concepta & diſpoſita. Hoc autem ideo , quoniam ipſorum conſtructionem minus concinnam , & propoſito

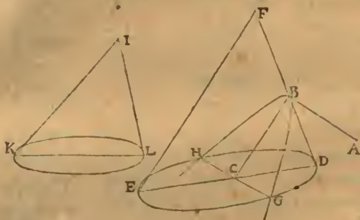
posito congruentem, demonstrationemque nonnihil obscuram in ipso Apollonio animaduertimus. Quare nouam instituimus viam, & συνθετικὴν propriæ cuiusque quæsiti naturæ conuenientem, ipsamque omnimodam exhibuimus: eandemque simplicibus & proprijs, nouisque etiamnum aliquot, demonstrationibus firmauimus: vnde liquidò constet, quam postremo problemati determinationem circa exhibendam ellipticam in coni superficie sectionem apposuimus, ipsam in Apolloniano problemate 3°. etiam necessariò esse adhibendam, quæ tamen ibidem desideratur. Siquidem vacillantem posterioris casus eiusdem problematis Apollonianam constructionem reddiderit illico quicunque expositas ibi nouas K H, H M rectas in angulo K H M recto negauerit inæquales: cum vtique si æquales essent, problema redderetur impossibile. Sed &, si quæ insuper, quum penitiùs aliquantò in Apollonianorum problematum examen deuenimus, proposito non satis conuenientia deprehendimus, nobis (præocupatâ veniâ, ne præjudicium fiat magni Geometræ nomini & famæ) licitum sit & liberum dicere; hoc etiam addimus, nequaquam quæsito in triplici illo problemate ab Apollonio satisfactum fuisse. Siue enim mens illi fuerit coni sectionum descriptionem in plano instituere, quæ fuit Eutocij sententia, haudquaquam per constructam in priore casu circa datum angulum rectum solidæ sectionis figuram, nempe per inuentam & exhibitam in coni superficie sectionem, problemati videtur satisfactum. At vero; si ipsas etiam in coni superficie sectiones inuenire sibi proposuit Apollonius, per constructam in posteriori casu circa datum angulum obliquum planam figuram, & simplicem in plano quæsitæ coni sectionis lineationem, quæ ex præcedentibus nondum satis innotuerat, certè neque problemati & quæsito satisfactum dicemus. Equidem vix fidem mereri putamus, simplicem sibi coni sectionum in plano descriptionem propositam tantùm habuisse Apollonium, quam in priore & simpliciori casu non exhibuit, & propter quam in posteriori inutilis ipsi fuisse debuerat suscepta ardua axium & rectarum parametrorum inuentio: cum circa quamlibet diametrum datis positione parametris, aut figurarum lateribus vnà cum inclinationis angulo, æquè facilè quæsitum in vno quoque problemate ex antecedentibus obtineri potuisset, ac circa axes datis rectis parametris, exhibitis scilicet lateribus in angulo recto:

quæ & ipsa priori cuiusque problematis casui satisfecisse potuerant pro simplici in plano coni sectionum descriptione. Sed probabilius, aut saltem conuenientius est, etiam & ipsum conum fuisse quæsitum, & quæsitam in eius superficie propositam sectionem: quod vtrumque omnimodè præstitimus.

Quod constructionis viam, quam tenuit Apollonius, attinet, illa proximè sequentibus conuenientior, sed generalius aptanda nobis visa est.

PROBL. XVII. PROP. LI.

Dato cono: datisque positione duabus rectis lineis in dato angulo inuicem coniunctis, quarum altera sit terminata; exhibere conum dato similem, & in eius superficie parabolam, cuius datarum altera sit diameter, altera terminata parameter, & vertex punctum quod est ad angulum, ita vt ordinatæ ad eandem diametrum in eodem dato angulo applicentur.



Sit datus IKL conus, cuius vertex I, basis KL circulus: datæ autem sint binæ AB, BC rectæ lineæ in dato ABC angulo inuicem coniunctæ: & sit AB terminata. Oporteatq; conum exhibere dato IKL cono similem, & in eius superficie parabolam, cuius parameter sit AB, vertex B, & BC diameter ad quam ordinatæ in dato eodem ABC angulo applicentur. Sit autem datus ABC angulus primùm rectus.

Secetur IKL conus plano per axem ad basim recto faciente triangulum KIL: & sumpto in recta BC puncto quolibet C, constituantur ad ipsius vtrumque B & C terminum bini BCD, CBD anguli singuli singulis IKL, KIL angulis æquales: & sit rectarum BD, CD concursus in D: productâ autem DC in E, vt sit rectangulo ABC æquale rectangulum DCE, du-

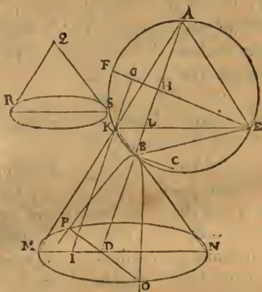
catur per E ipſi BC parallela EF, occurrens productæ DB in F. Erit igitur vtrumque CBD, EFD triangulum triangulo KIL ſimile. Intelligatur itaque FED conus, cuius vertex F, baſis ED circulus, iam ſectus per axem plano ad baſim recto facien-te triangulum EFD, rurſus ſecundùm BC rectam ſecari plano ad triangulum EFD recto formante in ſuperficie ſectionem GBH. Palam eſt quod ſectio GBH erit parabola. Dico igitur conum FED, & exhibitam in eiuſdem ſuperficie parabolam GBH problemati ſatisfacere.

Quoniam enim vtrumque KIL, & EFD triangulum per axem eſt; & ad baſim coni rectum, eſtque alterum alteri ſimile: erit & alter alteri conus, ex definit. nempe conus FED cono IKL ſimilis. Sed & propter rectangulum DCE rectangulo ABC æquale, oſtendetur, vt in 45 huius, parabolæ GBH rectam parametrum eſſe BA, & axem BC ad quem ordinatæ in dato eodem ABC angulo recto applicabuntur. Quare ſic problemati erit ſatisfactum.

Si verò datus ABC angulus non fuerit rectus, ſed obliquus; incumbetur primùm in axis & rectæ parametri inuentionem, vt in eiuſdem 45 huius poſteriori caſu iam factum eſt: & è nouis datis in angulo recto reliqua perficientur vt proximè dicta ſunt; oſtenderturque deſcriptæ circa axem inuentum parabolæ exhibitam in coni ſuperficie parabolam eſſe eandem, cuius etiam ſit BC diameter, & AB contigua parameter, cui æquidiſtantes erunt quæ à ſectione ad eandem BC diametrum ordinatim, ideoque in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur. Quare & hoc caſu problemati ſic ſatisfactum erit.

PROBL. XVIII. PROP. LII.

Dato cono: datisq; positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera sit ad partes anguli producta; exhibere conum dato similem, & in eius superficie hyperbolam cuius datę primùm lineæ sint altera transuersa diameter, altera contigua parameter, vertexq; punctum quod est ad angulum, & producta diameter ad quam ordinatę in eodem dato angulo applicentur.



Oportet autem vt datus conus, saltem productus, sit quæsitæ hyperbolæ capax, hoc est, si datæ AB, BC rectæ angulum ABC constituant rectum, vel, si obliquum, quum quęsitæ hyperboles axis exhibebitur vnà cum recta parametro, vt datus vtroq; casu conus sit eiusmodi qui ad 40 huius iam supra determinatus est.

Sit igitur datus QRS conus, cuius vertex Q, basis RS circulus, & datæ binæ AB, BC rectæ lineæ terminatæ datum facientes angulum ABC: sitque AB producta ad partes B in D. Oporteatque conum exhibere dato QRS cono similem, & in eius superficie hyperbolam cuius sit AB transuersa diameter, & BC contigua parameter, ac vertex B, & BD diameter ad quam ordinatæ in dato eodem ABC angulo applicentur. Sitque datus ABC angulus primùm rectus.

Secetur QRS conus plano per axem ad basim recto faciente triangulum RQS: & circa AB rectam describatur circuli circumferentia cuius portio altera sit verticalis RQS anguli capax: factoque ABE angulo alterutri angulorum qui ad basim, vt angulo QRS, æquali, occurrat BE eidem circumferentiæ portioni in E: iunctâque AE, secetur AEB angulus bifariam per rectam EF quæ circumferentiæ occurrat in F, & rectam AB secet in H: vt autem AB ad BC, ita fiat EH ad HG: ducaturque GK æquidistans AB, quæ circumferentiam secet in K: (hoc autem fieri posse constat ex determinatione, nisi si punctum G puncto

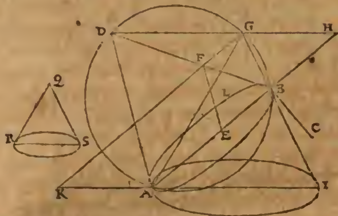
puncto F coincidat, quo caſu & punctum K vnà coincidet, & ducta ipſi A B æquidiſtans circumferentiam continget in F:) iunctâque E K iungantur A K, K B & producantur donec rectæ M D N ipſi E K æquidiſtanti occurrant in M & N. Intelligatur itaque K M N conus, cuius vertex K, baſis M N circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum M K N ad baſim coni rectum, rurſus ſecari ſecundum lineam B D plano ad triangulum M K N recto, formante in ſuperficie hyperbolam O B P. Dico conum K M N & exhibitam in eiuſdem ſuperficie hyperbolam O B P problemati ſatisfacere.

Quoniam enim AEB, hoc eſt MKN, angulus angulo RQS eſt æqualis, angulusque A B E, hoc eſt A K E, ſiue K M N, æqualis angulo Q R S, erit & reliquorum E A B, K N M vterque reliquo Q S R angulo æqualis: triangulum igitur M K N triangulo R Q S ſimile erit. Et vtrumque per axem eſt, & ad baſim coni rectum: conus igitur KMN, ex definit. cono QRS ſimilis erit. Producta autem GK (vel, ſi vt AB ad BC, ita ſit EH ad HF, ducta per F ipſi A B æquidiſtans) rectæ M N occurrat in I. Igitur quoniam propter æquales K A B, K E B angulos, itemque A K E, A B E, & verticales ad L etiam æquales, triangulum K A L, hoc eſt M K I, triangulo B E L ſimile eſt: ideoque & reliquum I K N triangulum reliquo E L A triangulo ſimile: cum vt A B ad B C, ita ſit E H ad H G, hoc eſt E L ad L K: & ita E L quadratum ad E L K, ſiue A L B rectangulum: atque etiam, propter ſimilitudinem triangulorum, vt E L quadratum ad A L B rectangulum, ita K I quadratum ad M I N rectangulum: vt AB ad BC, ita erit KI quadratum ad MIN rectangulum: &, per 14 primi huius, propter triangulum M K N ad baſim coni rectum, ita etiam erit A B tranſuerſus hyperboles O B P axis ad rectam parametrum. Quare & B C etiam recta erit parameter: ideoque & B D axis ad quem ordinatæ in angulo recto applicabuntur. Igitur & problemati ſic ſatisfactum erit.

Non exiſtente autem dato A B C angulo recto, ſed obliquo, inuenientur primùm tranſuerſus axis, & recta parameter, veluti in eiuſdem 48 huius poſteriori caſu factum eſt, & è nouis datis in angulo recto reliqua perficientur vt proximè dictum eſt: demonſtrabiturque deſcriptæ circa inuentum axem hyperbolæ exhibita in coni ſuperficie hyperbola eadem, cuius etiam datæ A B, B C lineæ ſint altera tranſuerſa diameter, altera contigua parameter.

PROB. XIX. PROP. LIII.

Dato cono: datisq; positione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis; exhibere conum dato similem, & in eius superficie ellipsim cuius vertex sit punctum ad angulum, & datarum linearum altera parameter, altera transuersa diameter contigua ad quam ordinatæ in dato eodem angulo applicentur.



Oportet autem rursus vt, si datus angulus sit rectus, datæ rectę lineæ sint inuicem inæquales.

Sit igitur datus QRS conus, cuius vertex Q, basis RS circulus, & datę binę AB, BC rectæ lineæ terminatę, in dato ABC angulo inuicem coniunctæ. Oporteatque conum exhibere dato QRS cono similem, & in eius superficie ellipsim, cuius BC sit parameter, vertex B, & AB transuersa diameter contigua ad quam ordinatæ in dato eodem ABC angulo applicentur. Sitque datus ABC angulus primùm rectus: ideoque & rectæ AB, BC inæquales sint inuicem.

Secetur QRS conus per axem plano ad basim recto faciente triangulum RQS: & super AB rectâ describatur circuli circumferentia cuius altera portio sit verticalis RQS anguli capax: fiatque BAD angulus alterutri eorum qui ad basim, vt QRS, angulo æqualis: occurratque AD circumferentiæ in D: iunctâque BD, sumatur in BA recta BE æqualis BC; ductaque EF æquidistante AD quæ occurrat BD in F, ducatur FG æquidistans AB, & circumferentiæ occurrens in G: iunganturq; DG, GA, GB: ducta autem per A recta IAK æquidistans DG rectis GB, GF productis occurrat in I & K. Erit igitur angulus GBA singulis GIA, & DBA, hoc est DGA, siue GAI, maior: ideoq; rectę BA recta AI neque æquidistans, neque subcontrariè erit posita. Intelligatur itaque GAI conus, cuius vertex G, basis AI circulus, plano per axem sectus faciente triangulum AGI ad basim coni rectum,

rurſus per rectam AB ſecari plano ad triangulum AGI recto formante in ſuperficie ellipſim ALB. Dico conum GAI, & exhibitam in eiuſdem ſuperficie ellipſim ABL problemati ſatisfacere.

Producta DG productæ AB occurrat in H. Quoniam igitur propter æquales BDA, hoc eſt BGA, & RQS angulos, itemque BAD, hoc eſt BGH, vel BIA, & QRS etiam æquales, erit & reliquorum vterque GAI, & DBA angulus reliquo QSR angulo æqualis: ideoque & vnumquodque AGI, ADB triangulum triangulo RQS ſimile. Sed & vtrumque AGI & RQS per axem eſt, & ad baſim coni rectum: conus igitur GAI cono QRS ſimilis erit. Quoniam autem vt AB ad BC, vel BE, ita eſt DB ad BF: & ita DH ad HG, hoc eſt ita DH quadratum ad DHG, ſiue AHB rectangulum: cum ſit GIK angulus angulo HAD ęqualis, & in parallelogrammo KH etiam angulus ad H angulo ad K æqualis ſit, ideoque & reliquus IGK reliquo ADH: vtque DH ad HA, ita ſit GK ad KI: & propter ſimilitudinem triangulorum DBH, GAK, vt DH ad HB, ita etiam ſit GK ad KA: vt DH quadratum ad AHB rectangulum, hoc eſt vt AB ad BC, ita erit GK quadratum ad IKA rectangulum: & ita, ex 14 primi huius, tranſuerſa ellipſeos BLA diameter AB ad contiguam parametrum. Propter vtrumq; autem per BLA, & baſis coni planum ad triangulum AGI rectum, erit AB tranſuerſus ellipſeos ALB axis. Igitur & BC eiuſdem erit recta parameter: ideoque à ſectione ad AB diametrum ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicabuntur. Quare & ſic problemati ſatisfactum erit.

Non exiſtente autem dato ABC angulo recto, ſed obliquo, inuenientur primò, vt in 50 huius poſteriori caſu factum eſt, ſectionis axis tranſuerſus, & recta parameter: atque è nouis datis in angulo recto reliqua etiam perficientur vt proximè dictum eſt: oſtendeturque deſcriptę circa inuentum axem ellipſi exhibita in coni ſuperficie ellipſis eadem, cuius ideo ſit etiam AB tranſuerſa diameter, & BC contigua parameter.

THEOR. XXV. PROP. LIV.

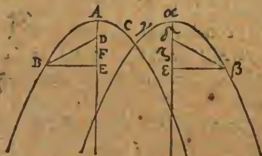
Si binæ parabolę ęquales habeant axis portiones vertice & vmbilico interceptas; erit altera alteri eadem.

Hoc autem ſatis conſtat. Quoniam ſi æquales habeant rectas parametros, erit, ex 8 huius, altera alteri eadem. Atqui ſi æquales habeant axis portiones vertice & vmbilico interceptas, etiam, ex definit. & earum quadruplas, rectas ſcilicet parametros, æquales habebunt.

THEOR. XXVI. PROP. LV.

Si in binis parabolis vtrobique recta à sectione ad vmbilicum inclinetur sub æqualibus cum axe angulis, & ad easdem sectionis partes: sitque vnius inclinata alterius inclinatę æqualis; erit altera alteri parabola eadem.

Sint binæ parabolæ BAC, βαγ, quarum axes AD, αδ, vmbilici D, δ: sint autem à sectione inclinatæ rectæ BD, βδ, quæ æquales sint inuicem, & æquales faciant BDA, βδα angulos. Dico parabolam βαγ parabolæ BAC esse eandem.



Si quidem enim sit vterque BDA, βδα angulus rectus, erit vtraq; BD, βδ rectæ parametri dimidia; ideoque &, propter æquales rectas parametros, erit, ex 8 huius, altera alteri parabola eadem.

Sint autem anguli BDA, βδα non recti. Ducantur perpendiculares BE, βε, & bifariam secentur DE, δε in F & ζ. Æqualis est igitur βδε angulus angulo BDE: quare & recta βε rectæ BE, & recta δε rectæ DE erit æqualis: ideoq; & dimidia ζδ dimidiæ FD etiam æqualis erit. Quadrato autem BE æquale est quadruplum EAD rectangulum: quadratoque βε æquale quadruplum εαδ rectangulum: quare & rectangulum εαδ rectangulo EAD erit æquale: & additis æqualibus FD, ζδ quadratis, erit quadratum ex ζα quadrato ex FA æquale, rectaque ζα rectæ FA æqualis: quare & reliqua δα; vel (si perpendiculares BE, βε supra vmbilicos D, δ cadant) composita, reliquæ; vel compositæ, DA erit æqualis. Igitur, ex antecedente, parabola βαγ parabolę BAC eadem erit. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

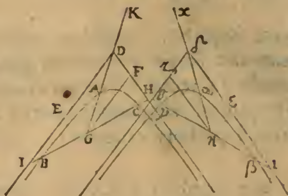
THEOR. XXVII. PROP. LVI.

Si binæ hyperbolę ęqualibus aſymptoton angulis contineantur: & recta à centro vnius ad ſectionem ducta æqualis ſit rectæ à centro alterius ad ſectionem ductę aſymptoton angulum ſimiliter diuidenti; erit altera alteri hyperbola eadem.

Sint binę hyperbolæ BAC, $\beta\alpha\gamma$: quarum aſymptoti DE, DF, itemque $\delta\varepsilon$, $\delta\zeta$ æquales contineant EDF, $\varepsilon\delta\zeta$ angulos: ſit autem & $\delta\alpha$ à centro ad ſectionem ducta ductæ DA æqualis: atque etiam angulus $\varepsilon\delta\alpha$ angulo EDA æqualis. Dico hyperbolam $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ BAC eſſe eandem.

Producantur vtrobique DA, $\delta\alpha$ in G & η, vt ſit $\alpha\eta$ æqualis AG: ductaque GF æquidiſtans ſit DE: & ſumptâ FH æquali DF, iungatur HG & producatur in I ſectioni occurrens in B & C: ſimiliter & ducta $\eta\zeta$ æquidiſtans ſit $\delta\varepsilon$: ſumptâque $\zeta\theta$ æquali $\delta\zeta$, iungatur $\theta\eta$, & producatur in ι ſectioni item occurrens in β, γ. Æquales igitur erunt HG, GI, itemque $\theta\eta$, $\eta\iota$. Sed & propter æquales $\delta\eta$, DG rectas, & angulum $\zeta\delta\eta$ angulo FDG æqualem, atque angulum $\delta\eta\zeta$ angulo DGF, erit & recta $\delta\zeta$ rectæ DF, ideoq; & recta $\delta\theta$ rectæ DH æqualis: quare & recta $\theta\eta$ rectę HG etiam æqualis erit: ideoq; & angulus $\delta\eta\theta$ angulo DGH æqualis. Igitur vt DG quadratum ad GH quadratum, ita erit $\delta\eta$ quadratum ad $\eta\theta$ quadratum. Sed propter æquales, ex coroll. 2 ad 39 primi huius, HC, BI, itemq; $\theta\gamma$, $\beta\iota$; ideoq; & reliquam GB reliquæ CG ęqualem, & reliquam $\eta\beta$ reliquæ $\gamma\eta$, ordinatim à ſectione ad DG diametrum applicata eſt CG, & ad $\delta\eta$ diametrum ordinatim applicata $\gamma\eta$: ideoque vt DG quadratum ad GH quadratum, ita, ſumptâ DK ęquali & in directum AD, eſt rectangulum KGA ad quadratum GC: & vt $\delta\eta$ quadratum ad $\eta\theta$ quadratum, ita etiam eſt, ſumptâ $\delta\kappa$ æquali, & in directum $\alpha\delta$, rectangulum $\kappa\eta\alpha$ ad quadratum $\eta\gamma$, hoc enim in eadem 39 primi huius demonſtratum eſt: eſtq; rectangulum $\kappa\eta\alpha$ rectangulo KGA

æquale: igitur & quadrato CG æquale erit quadratum $\gamma\nu$: ideoq; & recta $\gamma\nu$ rectæ CG æqualis. Estq; $\kappa\alpha$ transuersa hyperbolæ $\beta\alpha\gamma$ diameter rectę KA transuersæ diametro BAC hyperbolæ æqualis: atq; etiam recta $\alpha\nu$ rectæ AG æqualis: & angulus $\alpha\nu\gamma$ angulo AGC æqualis: hyperbola igitur $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ BAC, ex 7 huius, eadem erit. Quod erat demonstrandum.



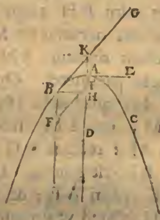
MONITVM.

Hactenus affatim satìs ipsas eiusdem nominis coni sectiones siue in plano, siue in coni superficie exhibitas è datis similibus & æqualibus diametris, aut parametris, comparauimus inuicem: & qua ratione proposita qualibet ex ipsis eædem sint inuicem necne, aut eiusmodi esse dignosci queant, notum satìs fecimus, & demonstratione firmauimus. Quanquam enim plures adduci poterant methodi, è quibus suscepto datorum examine conclusiones eædem præmißis deduci facilè potuissent, attamen præcipuas tantùm recensere nobis visum est in quas reliquæ omnes facilè resoluantur & recidant: ne istiusmodi discußio pro varijs & innumeris datorum differentijs in immensum abiret. Sed & nonnullæ fuerunt in specialem sequentis libri de similibus coni sectionibus tractatum aßeruandæ: siquidem germanæ sunt ambæ hæ de iisdem & de similibus coni sectionibus speculationes, ideoque & quasi ex æquo in sortem veniunt, & messem partiuntur. Superest tamen etiamnum vt ipsas coni sectiones siue etiam in plano expositas, siue in coni superficie consideratas è datis dißimilibus & inæqualibus diametris aut parametris comparemus inuicem: quò tandem ex eiusmodi etiam datis, aut cognitis, binas aut quotcunq; propositas eiusdem nominis sectiones easdem inuicem pronunciemus & comprobemus. Denique & ipsas è datis æqualibus sed dißimilibus diametris ac parametris &

in plano, & in coni ſuperficie conferemus etiam inuicem, quò omnimodè dignoſci valeant & cautiùs ad optata aſſumi: nobilemque hanc circa ipſarum examen & notitiam inſtitutam ſpeculationem nonnihil promouebimus, nobilibuſq; aliquot propoſitionibus ad inſtitutum profuturis, & ad ſolidos alioqui locos maximè vtilibus, ipſam ampliabimus.

THEOR. XXVIII. PROP. LVII.

In omni parabola, cuicunque diametro contigua parameter rectam parametrum ſuperat quadrupla axis portione intercepta eiuſdem vertice & ordinatim ab aſſumptę diametri vertice applicata.

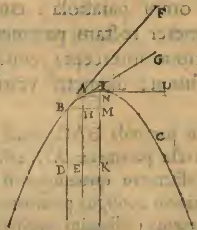


Sit parabola BAC, cuius axis AD, & recta parameter AE: aſſumpta autem diametro quacunque BF, ducatur eidem contigua parameter BG, & ad axem ordinatim applicetur BH. Dico BG parametrum ſuperare parametrum AE quadruplâ AH.

Sumatur enim quadranti AE æqualis AI: (niſi ſi ipſa AH eidem quadranti ex AE iam ſit æqualis:) & per I ducta ipſi BG æquidiſtans diametro BF occurrat in F: occurratque BG axi DA producto in K. Igitur, ex 44 huius, erit BF quadranti BG æqualis. Quoniam autem contingit BG, & ordinatim applicata eſt BH, erit, ex 18 primi huius, AK æqualis AH: quare & KI, hoc eſt BF, binis AI, AH erit æqualis. Igitur & quadrupla BF, hoc eſt BG, æqualis erit quadruplæ AI, hoc eſt AE, & quadruplæ AH. Superat igitur parameter BG rectam AE parametrum quadruplâ AH. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIX. PROP. LVIII.

In omni parabola, binarum inæqualium parametrorum maior ſemper remotiori ab axe diametro contigua eſt, minoremque ſuperat quadrupla propioris diametri portione intercepta eiuſdem vertice & perpendiculari ad ipſam à remotioris vertice ducta.



Sit parabola BAC, cuius axis IK, & binæ diametri quæcunq; AE, BD, ipſiſque contiguę parametri AG, BF: ſitque BF maior quàm AG: & BH perpendicularis ad AE. Dico diametrum BD longiùs abeſſe ab axe IK quàm AE: & parametrum BF ſuperare parametrum AG quadruplâ AH.

Secet enim BH axem IK, aut ei producta occurrat in M, ipſiq; æquidiſtans ducatur AN: & ſit IL recta parameter. Quoniam igitur, ex anteced. ſuperat AG ipſam IL quadruplâ IN, & eandem IL ſuperat BF quadruplâ IM, erit IM maior quàm IN: ideoque & BM maior quàm AN: rectaq; AG vnà cum quadrupla NM, hoc eſt AH, rectæ BF erit ęqualis. Quare & BF diameter remotior erit ab axe IK quàm AE: & recta BF rectam AG ſuperabit quadruplâ AH. Quod vtrumque erat demonſtrandum.

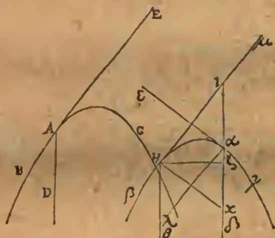
COROLL.

Hinc conſtat, In parabola parametros omnes ad eaſdem axis partes ductas inuicem eſſe inæquales: & omnium minimam eſſe quę axi contigua ducitur: atque eidem propiorem remotiore ſemper eſſe maiorem: binaſque tantum ex vtraque axis parte æqualiter à vertice diſtantes duci poſſe inuicem ęquales.

THEOR

THEOR. XXX. PROP. LIX.

Si ſint binæ parabolæ, & vtrobiq; recta ſectionem contingat æqualis ei iuxta quam poſſunt à ſectione ad diametrum per contactum ductam ordinatim applicatæ: ſintque tam contingentes inuicem, quam anguli ab ipſis cum contiguis diametris facti etiam inuicem inæquales: quadranti autem exceſſus quo maior contingens minorem ſuperat æquali ſumptâ diametri minori contingenti contiguæ portione à vertice, indidem educta perpendicularis ſectioni occurrat in puncto à quo ducta contingens cum contigua diametro æqualem faciat angulum ei qui in altera ſectione à diametro & contingente continetur; erit altera alteri parabola eadem.



Sint binæ parabolæ BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum diametri AD, $\alpha\delta$, & contiguæ parametri AE, $\alpha\epsilon$: ſitque parameter AE maior parametro $\alpha\epsilon$, & angulus DAE maior angulo $\delta\alpha\epsilon$: ſumptâ autem $\alpha\zeta$, quæ ſit æqualis quadranti differentiæ ipſarum AE, $\alpha\epsilon$, & educta perpendiculari $\zeta\eta$ quæ ſectioni occurrat in η, ductiſq; $\eta\theta$ diametro, & contingente $\eta\iota$, ſit angulus $\theta\eta\iota$ æqualis angulo DAE. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eſſe eandem.

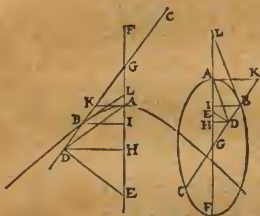
Producta $\zeta\alpha$ diameter contingenti $\eta\iota$ occurrat in ι: ipſiſque $\alpha\iota$, $\eta\iota$ æquidiſtantes ducantur $\eta\kappa$, $\alpha\lambda$. Ordinatim igitur à ſectione erunt applicatæ $\eta\kappa$ quidem ad diametrum $\alpha\zeta$, & $\alpha\lambda$ ad diametrum $\eta\theta$. Quoniam autem angulus $\theta\eta\iota$, hoc eſt $\theta\lambda\alpha$, maior eſt angulo $\delta\alpha\epsilon$, hoc eſt $\delta\kappa\eta$, ideoque & reliquus $\eta\lambda\alpha$, hoc eſt $\eta\iota\kappa$ minor reliquo $\eta\kappa\iota$, erit recta $\eta\kappa$ minor quâm $\eta\iota$, hoc eſt $\alpha\lambda$: quare & quadratum $\alpha\lambda$ quadrato $\eta\kappa$ maius erit, hoc eſt rectangulum ſub $\eta\lambda$ & contigua parametro maius rectangulo ſub $\alpha\kappa$ & contigua $\alpha\epsilon$ parametro. Suntque, propter contingentem $\eta\iota$, & ordinatim applicatam $\eta\kappa$, rectæ $\iota\alpha$,

hoc eſt $\nu\lambda$, & $\alpha\kappa$ inuicem æquales: parameter igitur diametro $\gamma\theta$ contigua maior erit parametro $\alpha\epsilon$, &, ex antecedente ipſam ſuperabit quadruplâ $\alpha\zeta$. Sit igitur $\nu\mu$ æqualis rectæ $\alpha\epsilon$, & quadruplę $\alpha\zeta$: erit $\nu\mu$ parameter parametro AE æqualis. Sed angulus $\theta\gamma\mu$ angulo DAE eſt etiam æqualis: igitur, ex 8 huius, parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXI. PROP. LX.

In omni hyperbola, aut ellipſi, ſi ad expoſitam quamcunque diametrum à ſupremo vertice recta ordinatim applicetur, à cuius termino vſque ad axem eidem diametro perpendicularis excitetur; quæ erit ratio rectanguli ſub eiuſdem diametri partibus vtroque tranſuerſæ termino & ordinatim ductâ interceptis ad eductę perpendicularis quadratum, eadem erit & tranſuerſi axis ad rectam ſectionis parametrum.

Sit hyperbola, aut ellipſis, BA, eiuſque diameter quæcunque CBD, vertex vterq; B, C, atque axis tranſuerſus AF: ſitq; ad BD diametrum ordinatim applicata AD, & perpendicularis DE axi occurrens in E. Dico vt CDB rectangulum ad quadratum DE, ita eſſe tranſuerſum axem AF ad rectam ſectionis parametrum.

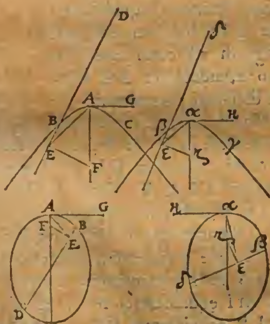


Ordinatim ad axem applicentur AK, BI, DH: ducaturq; BL ęquidiſtans AD: & ſit ſectionis centrum G. Igitur quoniam BL ęquidiſtans AD ſectionem contingit in B, & ordinatim applicata eſt BI, erit, ex 25 primi huius, rectangulo FIA æquale rectangulum GIL. Similiter & propter contingentem AK, & ordinatim applicatam AD, erit rectangulo CDB æquale rectangulum GDK. Quoniam autem vt GD ad DE, ita eſt GH ad HD: & vt GD ad DK, ita eſt GH ad HA: ex æquali vt DK ad DE, ita erit HA ad HD: quare, componendo, vt GDK rectangulum ad DE quadratum, ita erit GHA rectangulum ad HD quadratum. Sed ratio GHA rectanguli ad HD quadratum compoſita eſt ex ratione GH ad HD, hoc eſt GI ad IB, & ex ratione

AH ad HD, hoc est LI ad IB: quare vt GHA rectangulum ad HD quadratum, hoc est vt GDK rectangulum ad DE quadratum, ita erit GIL rectangulum ad IB quadratum. Sed &, ex coroll. ad eandem 25 primi huius, ita etiam est FA transuersus axis ad rectam parametrum: igitur vt GDK, hoc est CDB rectangulum ad DE quadratum, ita erit FA transuersus axis ad rectam parametrum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXII. PROP. LXI.

Si sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, & vtrobique rectâ à supremo vertice ad expositam quamcunq; diametrum ordinatim ductâ, eadem sit vtrobique ratio rectanguli sub diametri partibus vtroque transuersæ termino & applicatâ interceptis ad contiguę vsque ad axem eductæ eidem diametro perpendicularis quadratum: sitque etiam recta huius parameter alterius rectę parametro æqualis; erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.



Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, BAC, $\beta\alpha\gamma$, & earum diametri quælibet DBE, $\delta\beta\varepsilon$, axes AF, $\alpha\zeta$, & rectæ parametri AG, $\alpha\eta$: sit autem ad DBE diametrum ordinatim applicata AE, & ad diametrum $\delta\beta\varepsilon$ ordinatim applicata $\alpha\varepsilon$: ductisque perpendicularibus EF, $\varepsilon\zeta$, eadem sit rectanguli $\delta\beta$ ad quadratum $\varepsilon\zeta$ ratio quæ rectanguli DEB ad quadratum EF: sitq; hyperbolæ, vel ellipsis $\beta\alpha\gamma$ recta parameter $\alpha\eta$ æqualis AG rectæ parametro hyperbolæ, vel ellipsis BAC. Dico hyperbolam, vel ellipsim $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi BAC esse eandem.

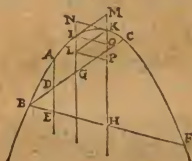
Quoniam enim, ex antecedente, vt DEB rectangulum ad EF quadratum, ita est transuersus hyperbolæ, vel ellipsis BAC axis ad rectam parametrum: & vt rectangulum $\delta\varepsilon\beta$ ad quadratum

$\epsilon\zeta$, ita est transuersus hyperbolæ, vel ellipsis $\beta\alpha\gamma$ axis ad rectam parametrum: vt transuersus axis sectionis BAC ad rectam parametrum, ita erit sectionis $\beta\alpha\gamma$ transuersus axis ad rectam parametrum, & permutatim. Suntq; rectæ parametri inuicem æquales: igitur & æquales inuicem erunt axes transuersi. Quare, ex 9 huius, erit hyperbola, vel ellipsis $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi BAC eadem. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXIII. PROP. LXII.

In omni parabola, si ab eodem sectionis puncto ad quamlibet diametrum binæ rectę quomodocunque inclinentur; vt erunt ipsarum quadrata inuicem, ita erunt diametrorum quæ ipsis ęquidistantes bifariam diuident contiguæ parametri inuicem.

Sit parabola BAC, eiusque diameter AE: ducanturq; quomodocunque rectæ BD, BE. Dico vt BD quadratum ad BE quadratum, ita esse parametrum diametro æquidistantes rectæ BD bifariam diuidenti contiguam ad contiguam diametro æquidistantes BE bifariam diuidenti paramętrum.

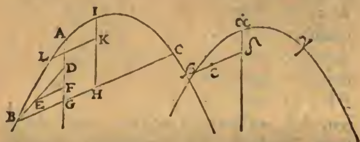


Sectioni occurrant productę BD quidem in C, & BE in F: sectisque bifariam BC in G, & BF in H, ducantur GI, HK æquidistantes AE, quę sectioni occurrant in I & K. Itaque sectionis diametri erunt IG, KH, & ad ipsas ordinatim applicatę BG quidem ad IG, & BH ad KH. Ostendendum est igitur vt BD quadratum ad BE quadratum, ita esse parametrum diametro IG contiguam ad contiguam diametro KH parametrum. Ducantur ad IG diametrum rectæ KL, MI ęquidistantes BG: & ad KH diametrum rectæ KN, IO, LP ęquidistantes BH. Ordinatim igitur erunt applicatæ KL quidem ad diametrum IG, & IO ad KH diametrum: quare & ipsis æquidistantes KN, IM sectionem contingent in K & I: ideoque & rectæ NI, hoc est KO, & IL æquales erunt inuicem. Sed vt quadratum BD ad BE quadratum, ita est KL quadratum ad LP, hoc est IO; quadratum: & vt KL quadratum ad IO quadratum, ita est rectangulum, vel parallelogrammum, sub recta IL & contigua parametro ad rectangulum, vel parallelo-

parallelogrammum, sub recta KO, siue IL, & contigua parametro, hoc est ita contigua diametro IL parameter ad contiguam diametro KQ parametrum: igitur vt BD quadratum ad BE quadratum; ita erit contigua diametro IG parameter ad contiguam diametro KH parametrum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXIV. PROP. LXIII.

Si sint binę parabolæ, & vtrobique ad expositam quamcunque diametrum recta ducatur ordinatim applicata: atque ab alterutrius ductæ puncto quolibet ad diametrum recta ducatur ęqualem faciens angulum ei qui in altera sectione ducta & diametro continetur: sit autem quadratum rectæ ordinatim applicatæ ad quadratum conterminæ ductæ, vt contigua eidem diametro parameter ad contiguam alteri diametro parametrum; erit altera alteri parabola eadem.



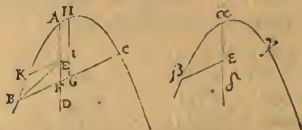
Sint binæ parabolę BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum diametri quælibet AD, $\alpha\delta$: sitque ad AD diametrum ordinatim applicata ED, & ad diametrum $\alpha\delta$ ordinatim applicata $\epsilon\delta$: à quolibet autem in ED puncto E ductâ EF quæ cum AD diametro faciat angulum EFA angulo $\epsilon\delta\alpha$ æqualem, vt contigua diametro AD parameter ad contiguam diametro $\alpha\delta$ parametrum, ita sit quadratum ED ad quadratum EF. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC esse eandem.

Vtrobique sectioni occurrant DE quidem in B, & $\delta\epsilon$ in β: ductâq; BG æquidistante EF, & productâ ad sectionem in C, secetur BC bifariam in H: ductaque HI æquidistans AD sectioni occurrat in I. Sectionis igitur diameter erit IH, & ad ipsam ordinatim applicata BH. Quoniam autem vt BD quadratum ad BG quadratum, hoc est vt ED quadratum ad EF quadratum, ita est contigua diametro AD parameter ad contiguam diametro $\alpha\delta$ parametrum, & ita, ex anteced. contigua diametro AD parameter ad conguam diametro IH parametrum, erunt ipsis IH, $\alpha\delta$ diametris contiguæ parametri inuicem æquales. Sumptâ itaque IK æquali $\alpha\delta$, & ductâ ad sectionem rectâ KL æquidistante BG, quæ & ad IH diametrum ordinatim erit applicata, erit quadratum LK quadrato $\beta\delta$ æquale, ideoq; & recta LK rectæ $\beta\delta$ æqualis. Sed & angulus LKI, hoc est EFA, vel BGA, angulo $\beta\delta\alpha$ etiam est

æqualis: igitur, ex 5 huius, erit parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eadem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXV. PROP. LXIV.

Si ſint binæ parabolę, & vtrobique à ſectione ad expoſitam quamcunque diametrum recta ſit ordinatim applicata, ita vt ſint interceptæ diametrorum portiones à vertice æquales inuicem: & ab vtriuſlibet applicatæ termino in ſectione recta alteri æqualis ad diametrum aptata æqualem faciat angulum ei qui in altera ſectione ordinatim ductâ & diametro continetur: erit altera alteri parabola eadem.

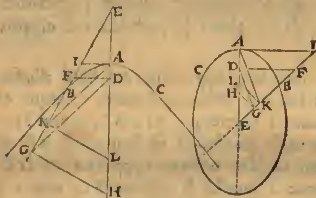


Sint binæ parabolę BAC, $\beta\alpha\gamma$, & earum diametri quælibet AD, $\alpha\delta$, atque ad ipſas ordinatim applicatæ BE, $\beta\epsilon$: ſint autem AE, $\alpha\epsilon$ inuicem æquales: atque inſuper aptata BF æqualis $\beta\epsilon$ faciat angulum BFA angulo $\beta\epsilon\alpha$ æqualem. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolę BAC eſſe eandem.

Productâ BF ad ſectionem in C, ſecetur BC bifariam in G: ductaque GH æquidiſtans AD ſectioni occurrat in H: & ſumptâ HI æquali AE, ducatur IK ęquidiſtans BF, quæ ſectioni occurrat in K. Sectionis igitur diameter erit HG, & ad eam ordinatim applicata KI: ideoque, ex 62 huius, vt BE quadratum ad BF quadratum, ita erit parameter diametro AD contigua ad contiguam diametro HG parametrum: & ita rectangulum ſub recta AE & contigua parametro, hoc eſt quadratum BE, ad rectangulum ſub recta HI & contigua parametro, hoc eſt ad quadratum KI. Quadratum igitur KI quadrato BF erit ęquale: ideoque & recta KI rectæ BF, hoc eſt rectæ $\beta\epsilon$, erit æqualis. Sunt autem & rectæ HI, AE, hoc eſt $\alpha\epsilon$, etiam æquales: atque inſuper angulus KIH, hoc eſt BFA, angulo $\beta\epsilon\alpha$ æqualis: igitur, ex 5 huius, parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolę BAC eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXVI. PROP. LXV.

In omni hyperbola aut ellipsi, si ab axis puncto quolibet ad expositam quamcunque diametrum binæ rectæ ducantur, altera ordinatim applicata, altera axi perpendicularis: atq; ab ordinatim applicatę termino recta ad axem educatur eidem diametro perpendicularis; quæ erit ratio rectanguli sub diametri partibus ordinatim applicatę contiguis à centro & perpendiculari ab axe educta sumptis ad contermine perpendicularis quadratum, eadem erit & transuersi sectionis axis ad rectam parametrum.



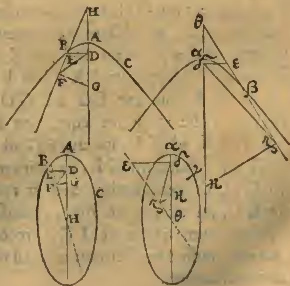
Sit hyperbola, aut ellipsis, BAC, eiusque axis A D, centrum E: ducta autem diametro quacunque EB, & à sumpto in axe puncto quolibet D ductis D G ordinatim ad E B diametrum applicatâ, & D F perpendiculari ad A D, erigatur G H diametro E B perpendicularis, axi occurrens in H. Dico vt rectangulum E G F ad quadratum GH, ita esse transuersum sectionis axem, scilicet duplam A E, ad rectam parametrum.

Ducantur A I æquidistans D F, A K æquidistans D G, & KL equidistans G H. Igitur vt E K ad K L, ita erit E G ad G H: & vt E K ad K A, ita erit E G ad G D: vtque A K ad K I, ita erit D G ad G F: igitur, ex æquali, vt EK ad K I, ita erit E G ad G F: & vt I K ad K L, ita erit F G ad G H: quare vt rectangulum EKI ad quadratum K L, ita erit rectangulum E G F ad quadratum G H, & permutatim. Sed vt rectangulum E K I ad quadratum K L, ita est, ex 60 huius, transuersus axis sectionis ad rectam parametrum: igitur vt E G F rectangulum ad G H quadratum, ita erit transuersus sectionis axis ad rectam parametrum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXVII. PROP. LXVI.

Si ſint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes, æquales habentes rectas parametros, & vtrobique à quolibet in axe puncto ad aſſumptam quamcunque diametrum binæ rectæ agantur, altera ad eandem ordinatim applicata, altera axi perpendicularis: atque etiam vtrobique ordinatim applicatæ contermina ad axem educatur aſſumptę diametro perpendicularis: ſit autem eadem rectanguli ſub vnius diametri partibus ordinatim applicatæ contiguis à centro & perpendiculari ab axe educta ſumptis ad conterminæ perpendicularis quadratum ratio, quę rectanguli ſub alterius diametri partibus ſimiliter ſumptis ad contermię eductæ perpendicularis quadratum; erit altera alteri hyperbola vel ellipſis eadem.

Sint binę hyperbolæ, aut binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quæ ęquales habeant rectas parametros: ſintque earum axes AD, $\alpha\delta$, & diametri quęcunque BF, $\beta\zeta$, centra H, θ: & ſint à quocunq; in axe AD puncto D ad diametrum BF ductæ binæ rectæ DF quidem ad ipſam ordinatim applicata, & DE ad axem perpendicularis: ſitque à puncto F excitata FG eidem BF diametro perpendicularis, quæ axi occurrat in G: ſimiliterque & à quolibet in $\alpha\delta$ axe puncto δ ductis $\delta\zeta$ ad $\beta\zeta$ diametrum ordinata, & $\delta\epsilon$ ad axem perpendiculari, erigatur $\zeta\eta$ eidem $\beta\zeta$ diametro perpendicularis, axi occurrens in η: ſit autem eadem rectanguli $\theta\zeta\epsilon$ ad quadratum $\zeta\eta$ ratio, quę rectanguli HFE ad quadratum FG. Dico hyperbolam, aut ellipſim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC eſſe eandem.



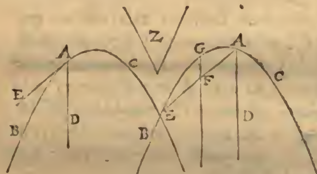
Quoniam enim, ex anteced. vt rectangulum HFE ad quadratum FG, ita eſt tranſuerſus ſectionis BAC axis ad rectam parametrum

metrum: & vt rectangulum $\theta\zeta\iota$ ad quadratum $\zeta\nu$, ita est transuersus sectionis $\beta\alpha\gamma$ axis ad rectam parametrum; vt transuersus sectionis B A C axis ad rectam parametrum, ita erit sectionis $\beta\alpha\gamma$ transuersus axis ad rectam parametrum, & permutatim. Suntque rectæ parametri inuicem æquales: igitur & æquales etiam erunt transuersi axes inuicem. Quare, ex 9 huius, erit hyperbola, vel ellipsis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, B A C eadem. Quod erat demonstrandum.

PROBL. XX. PROP. LXVII.

Data coni sectione, inuenire eiusdem diametrum ad quam ordinatim ductę in dato angulo applicentur.

Oportet autem, si data sectio sit ellipsis, vt datus angulus non sit maior angulo qui lineis à maioris axis terminis ad mediam sectionem inclinatis continetur.



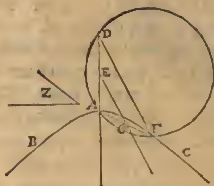
Sit data coni sectio B A C primùm parabola: datusque angulus Z. Oporteat inuenire parabolę B A C diametrum ad quam ordinatim ductæ in dato Z angulo applicentur.

Inueniatur parabolæ B A C diameter quæcunque A D: & in puncto A constituatur D A E angulus æqualis dato Z angulo. Si quidem recta A E sectionem contingit in A, erit ipsa A D diameter quæsita: ordinatim enim ad ipsam applicatę contingenti æquidistantes ducentur. Sectioni autem occurrat A E in E, eádemque bifariam sectâ in F, ducatur recta F G æquidistans A D, sectionique occurrens in G. Dico rectam G F esse diametrum quæsitam.

Quoniam enim G F æquidistat A D paraboles diametro, erit & ipsa diameter: &, propter rectam A E bifariam sectam in F, erit vtraque E F, A F ad G F diametrum ordinatim applicata, & sub eodem dato Z, hoc est D A F, vel G F A angulo. Quare quæsito in parabola sic satisfactum erit.

Sit iam data B A C coni ſectio hyperbola: datuſq; item Z angulus.

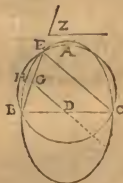
Inueniatur ſectionis axis tranſuerſus A D, ac centrum E: & ſuper A D deſcribatur circuli circumferentiæ portio D F A dati Z anguli capax, quæ ſectioni occurrat in F: iunctaque A F bifariam ſecetur in G: ducaturque diameter E G. Dico diametrum E G problemati ſatisfacere.



Iuncta enim D F, quoniam A F bifariam eſt ſecta in G, erit vtraque A G, F G ad E G diametrum ordinatim applicata. Sed & A D bifariam etiam ſecta eſt in E: recta igitur E G rectæ D F erit æquidiſtans, ideoque & angulus A G E angulo A F D, hoc eſt dato Z angulo erit æqualis. Quare & inuenta eſt E G diameter problemati in hyperbola ſatisfaciens.

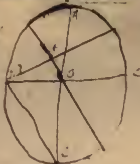
Sit autem data B A C ſectio ellipſis: datuſque etiam Z angulus.

Inueniatur ſectionis axis minor qui ſit B C, & centrum D: ſuperque rectâ B C deſcribatur circuli circumferentiæ portio B E C dati Z anguli capax, quæ ſectioni occurrat in E: iunctâque BE & bifariam ſectâ in G, iungatur D G, & ad ſectionem producatur in H: erit igitur D H ſectionis diameter. Dico diametrum D H problemati ſatisfacere.



Iungatur enim C E. Igitur, quoniam B E bifariam ſecta eſt in G, erit vtraque B G, E G ad D G diametrum ordinatim applicata. Sed & B C bifariam ſecta eſt in D: erit igitur rectæ CE recta DG æquidiſtans: ideoque & angulus B G D angulo B E C, hoc eſt dato Z angulo æqualis. Quare & diameter D G, hoc eſt D H, problemati ſatisfacit. Inuenta igitur eſt vniuersè ſectionis cuiuſlibet diameter ad quam ordinatæ in dato angulo applicentur. Quod erat propoſitum.

Sed & ſi datâ hyperbolâ, aut ellipſi, exhibeatur diameter quæcunque ad quam ordinatæ ſub majori acuto angulo quam ſit datus Z acutus etiam angulus applicentur: vel etiam ſub minori obtuſo, ſi datus Z ſit obtuſus; eadem ratione ex ipſa exhibita, veluti ex inuento iam vtriuſque ſectionis axe, quæſita diameter inuenietur problemati ſatisfaciens.

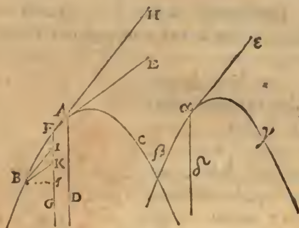


THEOR. XXXIX. PROP. LXVIII.

Si binarum parabolarum parametri ſint inuicem ęquales, non ſint autem ſub æqualibus vtrobique angulis ad contiguas diametros applicatæ; non erit altera alteri parabola eadem.

Oportet autem, vt bini inuicem comparati anguli ſint, ſigillatim ſumpti, aut ambo non maiores recto, aut ambo recto non minores.

Sint binæ parabolæ BAC, βαγ, earum diametri AD, αδ, & contiguæ parametri AE, αε: ſitque αε æqualis AE, ſed angulus δαε minor angulo DAE, quorum neuter ſit recto minor. Dico parabolam βαγ parabolæ BAC non eſſe eandem.



Si enim fieri poteſt, ſit altera alteri eadem. Quoniam angulus DAE minor eſt angulo δαε, & neüter recto minor eſt, inueniatur, per anteced. in parabola BAC diameter FG ad quam ordinatim ductæ in dato δαε angulo applicentur: ducaturque, per 56 primi huius, eidem contigua parameter FH. Erit igitur GFH angulus angulo δαε æqualis: ideoque &, ex 10 huius, parameter FH parametro αε, hoc eſt ipſi AE, erit æqualis. Sumpto autem in ſectione BAC quolibet puncto B, ducantur ad vtramlibet FG aut AD diametrum BI quidem æquidiſtans FH, & BK æquidiſtans AE. Quoniam igitur BKI angulus, hoc eſt DAE, recto non eſt minor, & eſt angulus BIF, hoc eſt GFH, ipſo DAE angulo maior, erit BIF angulus obtuſus: ideoque & BIK angulus acutus minor erit angulo BKI. Recta igitur BI maior erit quàm BK, quare & BI quadratum quadrato BK maius erit. Sed vt BI quadratum ad BK quadratum, ita eſt, ex 62 huius, FH parameter ad parametrum AE: igitur & parameter FH maior erit parametro AE. Sed iam oſtenſæ ſunt inuicem æquales: igitur & æquales erunt inuicem & inæquales. Quod eſt abſurdum.

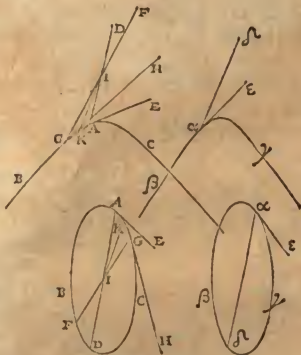
Eademque ratione, ſi angulus DAE maior ſit angulo δαε, & neuter ſit recto maior, idem abſurdum concludetur. Quare parabola βαγ parabolæ BAC eadem non erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XL. PROP. LXIX.

Si binæ hyperbolæ, vel binę ellipses, transuersas diametros inuicem æquales habeant, & contiguas parametros etiam inuicem ęquales: non sint autem æquales anguli qui vtrobique transuersa diametro & contigua parametro continentur; non erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, eadem.

Intelliguntur autem bini inuicem comparati anguli, sigillatim sumpti, aut ambo non maiores recto, aut ambo recto non minores.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, B A C, $\beta\alpha\gamma$, quarum transuersæ diametri A D, $\alpha\delta$ sint æquales inuicem, atque etiam contiguæ parametri A E, $\alpha\varepsilon$ inuicem æquales: sit autem angulus D A E maior angulo $\delta\alpha\varepsilon$, quorum neuter sit recto maior. Dico hyperbolam, vel ellipsim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, BAC non esse eandem.



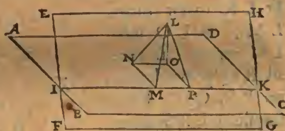
Si enim fieri potest, sit altera alteri eadem. Quoniam autem angulus D A E maior est angulo $\delta\alpha\varepsilon$, & neuter ipsorum recto maior, inueniatur, per 67 huius, in hyperbola, vel ellipsi, BAC transuersa diameter FG ad quam, vbi opus, productam, ordinatim à sectione ductæ in dato $\delta\alpha\varepsilon$ angulo applicentur: ducaturq; per 55 primi huius, sectionem contingens GH: sitq; sectionis B A C centrum I. Erit igitur angulus F G H angulo $\delta\alpha\varepsilon$ æqualis: ideoque &, ex 10 huius, erunt tam transuersæ F G, $\delta\alpha$ diametri inuicem, quam eisdem contiguæ parametri inuicem æquales: quare & F G erit ęqualis DA, atque etiam IG æqualis IA. Quod in hyperbola absurdum esse constat. Sed iunctâ insuper G A & bifariam sectâ in K, erit ducta I K ad ipsam A G perpendicularis, ideoq; & sectionis

sectionis axis, & vtraque A K, G K ad ipsum ordinatim applicata: vtraq; igitur AE, GH contingens, vbi opus producta, axi I K, etiam vbi opus producto, occurret in vno eodemq; puncto, hoc enim ex 23 primi huius sequetur necessario: ideoq; & è duobus I A, I G semidiametris, duabusq; AE, HG contingentibus ad concursum sumptis, fiet quadrilaterum cuius oppositi ad A & G anguli erunt inuicem æquales. Quod in vtraq; sectione est absurdum. Cum enim sint IAE, I G H anguli inæquales, & neuter recto maior, qui eorum alterutrius sumetur deinceps recto non minor erit: quare & reliquo maior sit omnino necesse est.

Similiter &, si angulus D A E minor sit angulo δαε, & neuter recto minor, idem absurdum concludetur. Quare propositarum sectionum altera alteri eadem non erit. Quod erat demonstrandum.

LEMMA. XV. PROP. LXX.

Si bina plana se inuicem non ad rectos secent angulos; quæ ab aliquo in eorum alterutro puncto ad communem amborum sectionem recta ducetur linea, cum contermina recta in altero plano educta ad eandem communem sectionem perpendiculari rectos non constituet angulos.



Sint bina plana A B C D, E F G H inuicem inclinata, eorumq; sit communis sectio recta I K: quolibet autem in eorum alterutro, vt in plano E F G H, sumpto puncto L, ducatur ad I K recta quæcunque L M: sitque M N in plano A B C D ducta perpendicularis ad I K. Dico angulum L M N non esse rectum.

Sit enim 1° L M perpendicularis ad I K. Palam igitur est quod eadem erit rectæ LM ad rectam MN inclinatio quæ plani EFGH ad planum ABCD: quare non erit LM ad MN perpendicularis, ideoq; nec angulus L M N rectus.

Non sit autem L M perpendicularis ad I K. Quoniam autem planum E F G H, plano A B C D est inclinatum, quæ à puncto L ad planum A B C D ducetur perpendicularis, communi amborum sectioni, scilicet rectæ I K, non occurret. Occurrat igitur eidem A B C D plano in puncto O: ducanturque O N æquidistans I K, & O P æquidistans M N: iungaturque L N. Quoniam igitur puncta N, O, P sunt in plano A B C D, & ad ipsum

ABCD planum perpendicularis est LO, erit planum per L,O,N plano per N,O,P, hoc est ABCD plano rectum. Propter æquidistantes autem NO, MP, & angulum NMP rectum, erit MN ad NO perpendicularis, ideoque & ad NL ipsam in eodem NOL plano contingentem: rectus igitur erit LNM angulus. Quare erit angulus LMN recto minor, ideoque non rectus. Quod erat demonstrandum.

LEMMA. XVI. PROP. LXXI.

Iisdem manentibus, si ab eodem præassumpto puncto ad eandem communem planorum sectionem plures rectę agantur; quæ ipsarum maior erit, maiorem cum contermina in altero plano ducta perpendiculari efficiet angulum: & binæ inuicem æquales æquales constituent angulos.

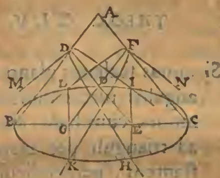
Sint eadem quæ in antecedente: ducanturque LR, LQ: & sit LR maior quàm LM, & LQ ipsi LM æqualis: sintque ad RQ perpendiculares RS, QT. Dico angulum LRS angulo LMN esse maiorem: & angulum LQT ipsi LMN esse æqualem.

Productæ ON occurrant RS quidem in S, & QT in T: iunganturque LS, LT. Erit igitur vterque LSR, LTQ angulus rectus, veluti & rectus in antecedente ostensus est LNM angulus: & propter ęquales RS, MN, maior erit ratio LR ad RS, quàm LM ad MN: ideoque & LRS angulus angulo LMN maior erit. Sed & propter æquales LM, LQ, atque etiam MN, QT, & vtrumque ad N & T angulum rectum, erunt triangula LNM, LTQ æqualia & similia: angulus igitur LQT angulo LMN erit æqualis. Quare omnino constat propositum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XLIV. PROP. LXXII.

Si conus ſcalenus plano ſectus per axem non ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur duobus non ęquidiſtantibus planis formantibus in ſuperficie binas parabolas: ſintq; communes cum baſe coni ſectiones ad baſim trianguli per axem perpendiculares: atque etiam rectæ vtriuſq; ſectionis & eiuſdem trianguli vertice interceptę æquales inuicem; ſi quidem triangulum iſoſceles eſt, erit binarum eiuſmodi parabolarum altera alteri eadem: at ſi ſcalenum eſt, non erit altera alteri ſectio eadem.

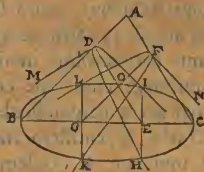
Sit conus A B C ſcalenus per axem ſectus plano faciente triangulum B A C ad baſim coni inclinatum, qui rurſus ſecetur, ſecundùm lineas H I, K L in baſe coni ad B C baſim trianguli B A C perpendiculares, duobus planis formantibus in ſuperficie binas H D I, K F L parabolas, quarum ſint diametri D E, F G inuicem occurrentes in O, & trianguli cruribus A B, A C, illa in D, hæc in F: ſintq; rectæ A D, A F æquales inuicem. Dico ſi quidem B A C triangulum iſoſceles eſt, parabolam K F L parabolæ H D I eſſe eandem: & ſi ſcalenum, non eſſe alteram alteri eandem.



Sint enim ſectionum parametri D M, F N ipſis D E, F G diametris contiguæ. Quoniam igitur vt B A C rectangulum ad B C quadratum, ita eſt, ex 12 primi huius, A D ad D M, & ita A F ad F N, erit F N parameter parametro D M æqualis. Sit itaq; iam triangulum B A C iſoſceles. Quoniam & D E æquidiſtat A C, & F G æquidiſtat A B, erit angulus O G E angulo O E G æqualis, & recta O G rectæ O E: quare, propter vtramque H E, K G perpendicularem ad B C, erit, ex anteced. angulus O G K, hoc eſt F G K, angulo O E H ſiue D E H æqualis. Et ſunt H I, K L bifariam ſectę, illa in E, hæc in G: ideoque & vtraque H E, K G ad contiguam diametrum ordinatim applicata: quare & ſub æqualibus vtrobique angulis parameter contiguæ diametro applicabitur: ideoque & angulus G F N angulo E D M erit æqualis. Igitur, ex 8 huius, erit K F L parabola parabolæ H D I eadem. Quod 1º erat demonſtrandum.

Sit iam B A C triangulum ſcalenum, & ſit A B maior quàm

A C. Erit igitur O G maior quàm O E: & propter perpendiculares ad G E rectas H E, K G, erit, ex antecedente, angulus F G K maior angulo D E H. Et quoniam vtraque H E, K G ordinatim eſt applicata, illa ad D E diametrum, hæc ad diametrum F G; ſub inæqualibus angulis parametri F N, D M contiguis F G, D E, diametris applicabuntur. Suntq; oſtenſę F N, D M parametri inuicem æquales: igitur, ex 68 huius, parabola K F L parabolæ H D I eadem non erit. Quod erat 2° demonſtrandum.



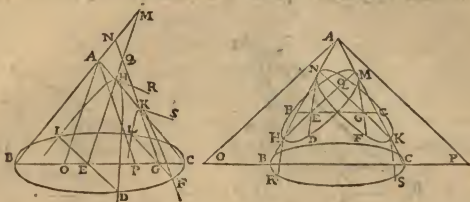
THEOR. XLV. PROP. LXXIII.

Si conus ſcalenus plano per axem ſectus non ad rectos baſi angulos rurſus duobus planis ſecetur quę faciant communes cum baſe, aut ipſi ęquidiſtante plano, ſectiones ad trianguli per axem facti baſim, aut ad ipſi æquidiſtantem, perpendiculares: & tranſuerſæ ſectionum in ſuperficie factarum diametri æquales ſint, & ſubcontrariè inuicem poſitæ, ſiue ad externum verticalem trianguli per axem angulum, ſi ſint hyperbolæ, ſiue ad internum, ſi ſint ellipſes; ſi quidem triangulum per axem iſoſceles eſt, erit factarum eiuſmodi binarum hyperbolarum, aut ellipſium, altera alteri eadem: at ſi triangulum per axem iſoſceles non eſt, neque dictarum ſectionum altera alteri eadem erit.

Sit conus A B C ſcalenus per axem ſectus plano faciente triangulum B A C ad baſim coni inclinatum, qui rurſus duobus planis ſecetur ſecundùm lineas D E, F G ad B C baſim trianguli, aut ad ipſi æquidiſtantem, perpendiculares: & ſint formatæ in ſuperficie coni binę D H I, F K L ſectiones, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſes, quarum tranſuerſæ diametri ſint H M, K N, quæ & ęquales ſint, & ſubcontrariè inuicem poſitę ad A verticalem trianguli B A C angulum. Dico ſi quidem A B C triangulum iſoſceles eſt, hyperbolam, vel ellipſim, F K L hyperbolæ, vel ellipſi, D H I eſſe eandem: & ſi ſcalenum eſt, non eſſe alteram alteri ſectionem eandem.

Ducantur

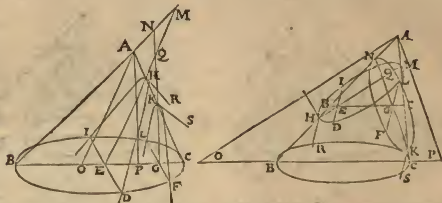
Ducantur à vertice trianguli BAC ad eiusdem basim BC, vbi



opus productam, ipsis HM, KN transuersis diametris æquidistantes AO, AP: sintq; eisdem contiguæ parametri HR, KS: & in quo HM, KN inuicem se secant, sit punctum Q. Igitur quoniam vt AO quadratum ad BOC rectangulum, ita est HM ad HR: & vt AP quadratum ad BPC rectangulum, ita est KN ad KS: atque, propter æquales ad K & M angulos, ideoq; & triangula AKN, AHM similia, vt AO quadratum ad BOC rectangulum, ita, ex 11 huius, est AP quadratum ad BPC rectangulum; vt HM ad HR, ita erit KN ad KS. Et sunt transuersæ HM, KN diametri inuicem æquales: igitur & æquales erunt inuicem ipsis contiguę HR, KS parametri. Sit itaque ABC triangulum primùm isosceles. Igitur propter æquales ad B & C angulos, erit angulus AOP, hoc est QEG, angulo APO siue QGE æqualis, ideoq; & recta QG rectæ QE æqualis: & propter vtramque DE, FG perpendicularem ad BC, erit, ex 71 huius, angulus QGF, hoc est KGF, angulo QED siue HED æqualis. Suntque DE, FG ordinatim ad HE, KG diametros applicatæ, quoniam & vtraque DI, FL bifariam est secta, illa in E, hæc in G: igitur sub æqualibus vtrobique angulis parameter contiguæ transuersæ diametro applicabitur. Et sunt transuersæ HM, KN diametri æquales inuicem, & ipsis contiguæ HR, KS parametri ostensæ etiam inuicem æquales: igitur, ex 9 huius, erit hyperbola, vel ellipsis, FKL hyperbolæ, vel ellipsi, DHI eadem. Quod 1° erat demonstrandum.

Sit nunc BAC triangulum scalenum, & sit AB maior quàm BC. Igitur & maior erit ACB angulus angulo ABC, &, in 1ª quidem figura, propter æquales CAP, BAO angulos, erit reliquus AOB, hoc est QEB, angulus reliquo APC siue QGC angulo maior: ideoque & QEG angulus angulo QGE minor erit. In 2ª autem figura, propter externum ACP angulum externo ABO minorem, & verticales CAP, BAO angulos ęquales, erit reliquus AOB, hoc est QEG, angulus reliquo

APC siue QGE angulo minor. Quare ad vtramlibet sectionem erit recta QE maior quàm QG: ideoque &, propter vtrumque



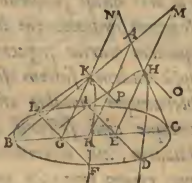
QGF, QED angulum, ex 70 huius, obliquum, & perpendicularem ad EG vtramque DE, FG, erit, ex 71 huius, angulus QED maior angulo QGF. Suntque DE, FG ordinatim applicatę: igitur sub inęqualibus vtrobique angulis ad transuersas HM, KN diametros applicabuntur contiguæ HR, KS parametri. Suntq; ostensæ HR, KS, veluti & HM, KN, inuicem æquales: igitur, ex 69 huius, non erit hyperbola, vel ellipsis, FKL hyperbolę, vel ellipsi, DHI eadem. Quod 20 erat demonstrandum.

MONITVM.

Sed & altera de binis hyperbolis in coni superficie à binis æquidistantibus planis ad diuersas verticis partes sectis, ideoque & idem trianguli per axem crus vertice non contingentibus, etiamnum nobis occurrit silentio non prætermittenda conclusio, quæ in singulari vtroq; & recto & scaleno cono, & in binis oppositis vera elucet, quanquam omnino contraria ei quam, in 21 huius, de binis hyperbolis à duobus æquidistantibus planis ad easdem verticis coni partes sectis, ideoque & in eodem trianguli per axem crure vertices habentibus, iam demonstrauimus. Quoniam autem ea de qua iam agimus in singulari scaleno cono plano per axem non ad rectos basi angulos secto magis dubia videri poterat, ideo & in singulari scaleno tantùm ipsam tibi proponimus: in binis autem oppositis facilè tibi conspicuam efficiet propositio nostra 14 huius: & pro singulari recto eadem erit demonstratio quæ prioris casus proximè sequentis propositionis. Apponet igitur & institutæ speculationi metam, & huic tertio libro finem, conceptum ad eandem theorema huiusmodi.

THEOR. XLVI. PROP. LXXIV.

Si conus ſcalenus plano per axem quomodocunque ſectus rurſus ſecetur ſecundùm binas in eiuſdem baſe rectas ad baſim trianguli per axem perpendiculares, duobus ęquidiſtantibus planis formantibus in ſuperficie binas hyperbolas, quarum tranſuerſæ diametri ſint æquales inuicem; erit factarum huiuſmodi hyperbolarum altera alteri eadem.



Sit conus ABC ſcalenus, vtcunq; per axem ſectus plano faciente triangulum BAC, qui rurſus ſecetur ſecundùm lineas DE, FG, quæ in baſe coni ſint ad BC baſim trianguli BAC perpendiculares, duobus æquidiſtantibus planis formantibus in ſuperficie binas DHI, FKL hyperbolas, quarum tranſuerſæ diametri ſint HM, KN inuicem ęquales. Dico hyperbolam FKL hyperbolę DHI eſſe eandem.

Sint enim ſectionum parametri HO, KP ipſis HM, KN tranſuerſis diametris contiguæ. Quoniam igitur bina per HDI & FKL plana inuicem æquidiſtant, erunt communes ipſorum cum triangulo BAC ſectiones, ſcilicet rectæ HE, KG ſectionum diametri, æquidiſtantes inuicem: quare, ducta ipſis æquidiſtante AR, vt AR quadratum ad BRC rectangulum, ita erit HM ad HO, & ita KN ad KP. Et ſunt HM, KN inuicem æquales: igitur & æquales inuicem erunt ipſis contiguę HO, KP parametri. Si quidem igitur triangulum BAC ad BDC baſim coni rectum eſt; erit & rectus vterque HED, KGF angulus. Sed & vtraque DE, FG ordinatim eſt applicata: quare & vtraque HM, KN tranſverſus erit axis, & vtraq; HO, KP recta erit parameter: ideoque &, ex 9 huius, erit altera alteri ſectio eadem. At ſi triangulum BAC ad baſim BDC eſt inclinatum; quoniam binæ KG, GF rectæ ſeſe contingentes binis ſeſe contingentibus rectis HE, ED æquidiſtant, æqualem continebunt KGF angulum angulo HED. Quare rurſus ſub æqualibus vtrobique angulis parametri HO, KP ad contiguas tranſuerſas HM, KN diametros applicabuntur: ideoque &, ex eadem 9 huius, erit altera alteri hyperbola eadem. Quod erat demonſtrandum.

TERTII LIBRI FINIS.



Ad quartum Conicorum librum.

MONITVM.

Præmissæ de ijsdem inuicem coni sectionibus tractationi ordine & natura consequens iam occurrit de similibus coni sectionibus instituenda disquisitio, alter scilicet de eiusdem nominis coni sectionum inuicem comparatione liber; qui, vt prioris erit quasi supplementum, ita & ad experimentorum physicorum imitationem maximo vtique poterit esse subsidio. Siquidem varias fugacis nimiùm radij optata vestigia, si non ipsa eadem, saltem similia restituendi & imitandi rationes plerumque notabit etiam & suggeret, dum propositæ cuicunque cõni sectioni alteram primùm exhibebit similem sectionem, aut discriminis rationem docebit: & deinde cuicunque etiam propositæ quæsitam in coni superficie similem alteram exhibendi methodum aperiet. Quare nõn te pigeat, Lector qui horum es studiosùs, Prodromo nostro ad huiusce agri lustrationem diuertenti interim adhærescere aliquandiu, quò ad eiusdem culturam fias instructior & paratior. Neque enim omnino suis caret sentibus, quanquam paucis asper, & Prodromi vestigijs iam pressus & complanatus, ideoque tibi facilè & absque vlla impeditione decurrendus videbitur. Memoratur hic idem ager ab Apollonio magno illo geometra olim excultus, sed in ipsum plus æquo liberalis fuit Apollonius: siquidem ampliores iusto fines eidem constituisse testatur Apolloniana definitio ab Eutocio ad Archimedis Ἰσόῤῥοπα *relata. Ipsos contraxit Prodromus noster, & ad iustos definitionis terminos coërcuit, nullo gloriæ aut ambitionis zelo ductus, sed solo veritatis indagandæ & asserendæ studio excitatus. Tu, quum occurret, de vtroque iudicium instítues & pronuntiabis.*



CLAVDII MYDORGII PATRICII PARISINI CONICORVM LIBER QVARTVS.

De eiusdem nominis Coni-sectionum inuicem comparatione; posterior.

SIVE

De Similibus Coni-sectionibus.

DEFINITIONES.

I.

SIMILES Diametrorum portiones dicimus, quæ vtrobique à vertice sumptæ, & eodem ordine, in ijsdem rationibus sunt ad inuicem.

II.

Similes Coni-sectiones dicimus, in quibus similes omnes similium diametrorum portiones vtrobique in ijsdem sunt rationibus ad conterminas rectas à sectione ordinatim applicatas.

Lege 15. A[illegible] [illegible] 6 [illegible] ubi invenies [illegible] hanc [illegible] non esse perfect[illegible]

MONITVM.

Tua & veritatis maximè intereſt, lector φιλαλήθης, de noua hac noſtra ſimilium coni ſectionum definitione nonnihil hìc admoneri. Quandoquidem ſi ipſam cum Apolloniana ſimilium conicarum linearum definitione compares, qualem nobis ad Archimedis Æqueponderantia tranſmiſit Eutocius Aſcalonita, & ipſe aui veteris geometra non ignobilis, de alterutra tibi haud dubiè occurret ſuſpicari. Quò igitur noſtra, proprÿs ſcilicet & ipſiuſmet Apollonÿ fundamentis innixa, tibi ſola probetur, & meritò amplectenda dignoſcatur; per te nobis hìc liceat in Apollonianam & aliorum definitiones aliquantùm digredi.

Retulit igitur Eutocius in 3. ſecundi Æqueponderantium Archimedis, Similes Coni ſectionum portiones ſic definiuiſſe Apollonium, in 6 Conicorum, Cum in ipſarum ſingulis ductis baſi æquidiſtantibus numero æqualibus, æquidiſtantes & baſes ſunt ab abſciſſas à verticibus diametrorum portiones in ÿſdem rationibus, & abſciſſæ ad abſciſſas. Et addidiſſe, Parabolas omnes inuicem eſſe ſimiles.

Quam autem conicis lineis, ſiue coni-ſectionum portionibus, aptauit definitionem Apollonius, eandem & ipſis coni-ſectionibus æquo iure aptaueris, ſi pro æquidiſtantibus baſi (quod, in Conicis, de ſpatio recta linea & coni ſectione concluſo tantùm dici meruit) æquidiſtantes cuipiam ordinatim ad diametrum applicatæ, reponas.

Commandinus autem Vrbinas inſignis, quanquam recentioris aui, geometra, cuique de reſtitutis & publicatis veterum geometrarum dignioribus monumentis tota Matheſis æternùm ſe debitricem agnoſcet, poſtquam, ab Eutocio mutuatus, abſque vlla demonſtratione præmiſit parabolas omnes eſſe ſimiles, ſubiunxit hyperbolas & ellipſes ſimiles eas eſſe, quarum coniunctæ diametri inter ſe, vel quarum figuræ latera eandem habent proportionem.

Poſtremus demum Dauid Riualtus à Flurantia Archimedis operum interpres, vel, ſi mauis, paraphraſtes, Eutocio & Commandino facilè ſubſcribens, quum ad Archimedis Conoidea &

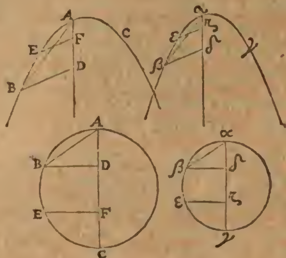
Sphæroidea Apollonianam Eutocij & binas Commandini similium hyperbolarum aut ellipsium definitiones examini subiecit, in id totus; sed nimius; incubuit, vt omnes rectè haberè ostenderet. Qui, cum ipsas inter se ita bellè conuenire ibidem concludat, & geometricè se demonstrasse præsumat, vt positâ alterutrâ necessariò sequatur altera, auctor fuit nobis in idipsum accuratiùs inquirendi: vnde tandem nobis innotuit Riualtum infœlicem admodum geometram, & muneri suscepto imparem, pro instituto examine non lucem aut demonstrationem geometricam eiusmodi definitionibus attulisse, sed meras nugas & tenebras offudisse, atque ita de suis reliquis ad Archimedem notis cautiùs legendis tacitè nos submonuisse.

Quare, & huius loci, & susceptæ rei ratio à nobis iam videri possit exigere, vt easdem etiam definitiones ad æquiorem trutinam, & castigatius paulò examen hìc reuocemus: nè à magnis nominibus (Apollonium dico & Commandinum) præiudicium fiat diutiùs veritati. Quoniam autem pleraq; priùs necessariò adstruenda veniunt, quæ hic liber sibi propria iam vindicauit, & tibi oportunè proponenda in ordinem conuenientiorem distribuit, post quæ nullum tibi de præmissâ nostra definitione dubium sit remansurum; satìs fore hìc duximus, de reliquis, Apollonianâ scilicet vnâ, & binis Commandini, interim te monuisse, ipsas nempe vitiosas esse & mancas; vt quæ similium coni sectionum; aut portionum similium; proprietates potiùs dici debeant, & accidentia, quàm definitiones. Quamuis enim similibus quibuslibet sectionibus; aut earum portionibus similibus, conueniant, ideo conuenire dicimus, quoniam similes ponuntur sectiones aut portiones: at non similes ideo dicentur, quòd definitiones eiusmodi ipsis omnino conueniant, cum & dissimilibus aptè etiam conuenire possint, vt suo tibi adnotatum occurret loco. Quemadmodum & similibus quibuslibet rectilineis figuris contingit latera circa respondentes angulos habere proportionalia; & in ijsdem vtrobique ad inuicem rationibus: at non ideo similes erunt figuræ, quæcunq; latera in ijsdem ad inuicem rationibus vtrobiq; habebunt. Atqui nisi cum definito conuertatur definitio, vitiosa est. Itaq; & de his iam non plura hìc inculcabimus; ad vtiliora properantes.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.



Mnes parabolæ inuicem, veluti & circulorum circumferentiæ omnes inuicem, ſimiles ſunt.



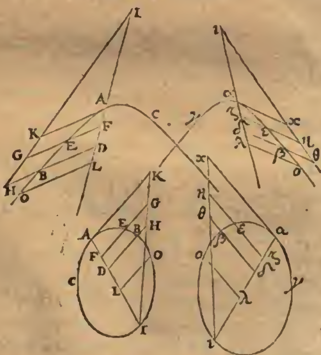
Sint binæ parabolæ, vel binæ circulorum circumferentiæ, B A C, $\beta\alpha\gamma$. Dico parabolam, vel circuli circumferentiam, $\beta\alpha\gamma$ parabolæ, vel circuli circumferentiæ, BAC eſſe ſimilem.

Sit enim parabolæ BAC diameter quæcumq; AD, & ad ipſam ordinatim ſint applicatæ B D, E F: iunctâque A B, inueniatur in parabola $\beta\alpha\gamma$ diameter $\alpha\delta$ ad quam ordinatim ductæ in dato A D B angulo applicentur: fiatq; $\delta\alpha\beta$ angulus angulo DAB æqualis, occurratq; recta $\alpha\beta$ ſectioni in β: ordinatimque applicatâ $\beta\delta$, vt A D ad A F, ita fiat $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$: ducaturque $\zeta\epsilon$ æquidiſtans $\beta\delta$, quæ & a ſectione ad diametrum $\alpha\delta$ ordinatim erit applicata. Quoniam igitur vt $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$, hoc eſt vt A D ad A F, ita eſt $\beta\delta$ quadratum ad $\epsilon\zeta$ quadratum: & ita BD quadratum ad EF quadratum; vt BD quadratum ad E F quadratum, ita erit $\beta\delta$ quadratum ad $\epsilon\zeta$ quadratum: & vt B D ad E F, ita erit $\beta\delta$ ad $\epsilon\zeta$. Sed vt B D ad D A, ita, propter ſimilia B D A, $\beta\delta\alpha$ triangula, eſt $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$: & vt D A ad A F, ita eſt $\delta\alpha$ ad $\alpha\zeta$: igitur, ex æquali, vt E F ad F A, ita etiam erit $\epsilon\zeta$ ad $\zeta\alpha$. Sed & ſimiliter omnes rectę vtrobique a ſectione ad diametrum ordinatim ductæ oſtendentur in iiſdem rationibus ad conterminas ſimiles diametri portiones: & ſunt expoſitæ A D, $\alpha\delta$ diametri ſimiles: igitur, ex definit. parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolæ B A C ſimilis erit. In binis autem circulorum circumferentijs quod propoſitum eſt ſic demonſtrabitur. Ductis à circumferentia B A C ad eiuſdem diametrum A C binis perpendicularibus B D, E F: iunctâque A B, fiat in circumferentia $\beta\alpha\gamma$ ad $\alpha\gamma$ diametrum angulus $\gamma\alpha\beta$ angulo C A B æqualis: ductâque perpendiculari $\beta\delta$, vt A D ad A F,

ad AF, ita fiat $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$: erigaturque perpendicularis $\zeta\epsilon$. Quoniam igitur vt AD ad DB, & DB ad DC, ita est $\alpha\delta$ ad $\delta\beta$ & $\delta\beta$ ad $\delta\gamma$, ideoque, ex æquali, vt AD ad DC, ita est $\alpha\delta$, ad $\delta\gamma$; erit, componendo, vt AD ad AC, ita $\alpha\delta$ ad $\alpha\gamma$. Sed vt AD ad AF, ita est $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$: igitur, ex æquali, vt AF ad AC, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\alpha\gamma$: &, diuidendo, vt AF ad FC, hoc est vt AF quadratum ad AFC rectangulum, siue FE quadratum, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\zeta\gamma$, hoc est ita $\alpha\zeta$ quadratum ad $\alpha\zeta\gamma$ rectangulum, siue $\zeta\epsilon$ quadratum. Quare vt AF ad FE, ita etiam erit $\alpha\zeta$ ad $\zeta\epsilon$. Eademq; ratione perpendiculares omnes vtrobique ductæ in ijsdem ostendentur rationibus ad conterminas similes diametri portiones: & sunt in circulis diametri omnes similes: igitur &, ex definit. circuli circumferentia $\beta\alpha\gamma$ circuli BAC circumferentię similis erit. Quod erat demonstrandum.

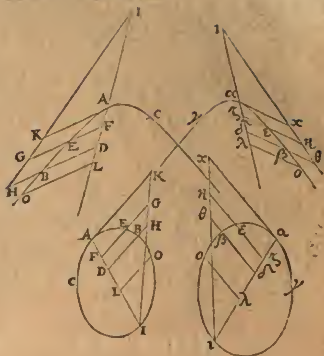
THEOR. II. PROP. II.

Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, & vtrobique à sectione ad expositam diametrum binæ rectæ ordinatim sint applicatæ: sit autem ordinatim applicatarum ad inuicem, & ad conterminas diametri portiones à vertice abscissas eadem vtrobique ratio: atque etiam anguli vnius applicatis & diametro contenti angulis alterius applicatis & diametro contentis sint æquales; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis.



Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, BAC, $\beta\alpha\gamma$, earumque diametri AD, $\alpha\delta$, vertices A & α: sintque à sectione BAC ad AD diametrum ordinatim applicatæ BD, EF: & à sectione $\beta\alpha\gamma$ ad $\alpha\delta$ diametrum ordinatim applicatæ $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$: vt autem BD ad EF, ita sit $\beta\delta$ ad $\epsilon\zeta$: & vt BD ad DA, ita sit $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$: vtq; EF ad FA, ita etiam sit $\epsilon\zeta$ ad $\zeta\alpha$: sitque angulus $\beta\delta\alpha$ æqualis angulo BDA. Dico hyperbolam, vel ellipsim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, BAC esse similem.

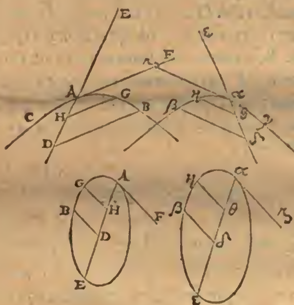
Singulis BD, EF quadratis singula ponantur æqualia ADH, AFG rectangula: iunctaque HG & producta diametro AD, vbi opus productæ, occurrat in I, & rectæ AK æquidistanti BD in K: similiter & singulis $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$ quadratis singula æqualia sint $\alpha\delta\theta$, $\alpha\zeta\eta$ rectangula: iunctaque $\theta\eta$ & producta diametro $\alpha\delta$, productæ vbi opus, occurrat in ι: ducaturq; $\alpha\kappa$ æquidistans $\beta\delta$. Quoniam igitur vt KA ad AI, ita est GF ad FI, & HD ad DI; atq; ita GFA rectangulum, hoc est EF quadratum, ad IFA rectangulum, & ita HDA rectangulum, siue BD quadratum, ad IDA rectangulum; erit IA transuersa hyperbolæ, vel ellipseos, BAC diameter, eiusdemque contigua parameter AK, hoc enim patet ex Corollario 2. ad 13. primi huius. Similiter & $\iota\alpha$ transuersa hyperbolæ, vel ellipseos, $\beta\alpha\gamma$ diameter ostendetur, & $\alpha\kappa$ eiusdem contigua parameter. Quoniam autem vt BD ad EF, ita est $\beta\delta$ ad $\epsilon\zeta$: & vt BD ad DA, ita est $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$: atque etiam vt EF ad FA, ita est $\epsilon\zeta$ ad $\zeta\alpha$; vt DA ad FA, ita, ex æquali, erit $\delta\alpha$ ad $\zeta\alpha$: &, diuidendo, vt DF ad FA, ita erit $\delta\zeta$ ad $\zeta\alpha$. Rursus, quoniam vt EF ad FA, hoc est vt GF ad EF, ita est $\epsilon\zeta$ ad $\zeta\alpha$, siue $\eta\zeta$ ad $\epsilon\zeta$, ex æquali etiam, vt GF ad FA, ita erit $\eta\zeta$ ad $\zeta\alpha$. Eademque ratione & vt HD ad DA, ita erit $\theta\delta$ ad $\delta\alpha$. Et quoniam vt FA ad DA, ita ostensum est esse $\zeta\alpha$ ad $\delta\alpha$; ex æquali adhuc, vt GF ad HD, hoc est vt IF ad ID, ita erit $\eta\zeta$ ad $\theta\delta$, siue $\iota\zeta$ ad $\iota\delta$: & diuidendo, vt IF ad FD, ita erit $\iota\zeta$ ad $\zeta\delta$. Sed vt DF ad FA, ita est $\delta\zeta$ ad $\zeta\alpha$: igitur, ex æquali, vt IF ad FA, ita erit $\iota\zeta$ ad $\zeta\alpha$. Sumpto autem alio quolibet in sectione BAC puncto O, ordinatim ad AF diametrum ducatur OL: & vt AF ad AL, ita fiat $\alpha\zeta$ ad $\alpha\lambda$: ducaturque λo æquidistans $\beta\delta$, quæ sectioni occurrat in o. Igitur quoniam vt IF ad FG, siue IA ad AK, ita est $\iota\zeta$ ad $\zeta\eta$, siue $\iota\alpha$ ad $\alpha\kappa$: vtq; IA ad AK, ita est ILA rectangulum ad OL quadratum: & vt $\iota\alpha$ ad $\alpha\kappa$, ita est $\iota\lambda\alpha$ rectangulum ad $o\lambda$ quadratum; vt ILA rectangulum ad LO quadratum, ita erit $\iota\lambda\alpha$ rectangulum ad λo quadratum. Sed, quoniam vt AF ad AL, ita est $\alpha\zeta$ ad $\alpha\lambda$: vtque IF ad AF, ita est $\iota\zeta$ ad $\alpha\zeta$: & in hyperbo-



lis diuidendo, vel & in ellipsibus componendo, vt IA ad AF, ita est $\iota\alpha$ ad $\alpha\zeta$: &, ex æquali, vt IA ad AL, ita est $\iota\alpha$ ad $\alpha\lambda$; rursusque, in illis, componendo, vel, in his, diuidendo, vt IL ad LA, hoc est vt ILA rectangulum ad LA quadratum, ita est $\iota\lambda$ ad $\lambda\alpha$, siue ita $\iota\lambda\alpha$ rectangulum ad $\lambda\alpha$ quadratum; ex æquali, vt OL quadratum ad LA quadratum, ita erit $o\lambda$ quadratum ad $\lambda\alpha$ quadratum: ideoque vt OL ad LA, ita etiam erit $o\lambda$ ad $\lambda\alpha$. Eademque ratione & omnes aliæ ipsis BD, $\beta\delta$ æquidistantes vtrobique à sectione ad diametrum ductæ ostendentur in ijsdem rationibus ad conterminas similes diametri portiones: suntque expositæ AD, $\alpha\delta$ diametri similes: igitur, ex definitionibus, hyperbola, aut ellipsis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, BAC similis erit. Quod erat demonstrandum.

THEOR. III. PROP. III.

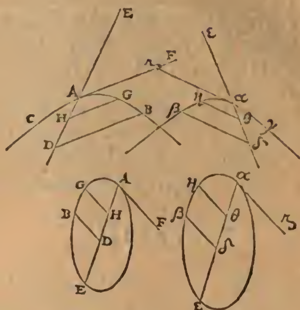
Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, similes sint; habebunt figurarum ad similes diametros factarum latera inuicem in eadem ratione.



Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, similes BAC, $\beta\alpha\gamma$, earumque similes quælibet diametri AD, $\alpha\delta$, quæ producantur in E & ϵ, vt sint transuersæ diametri, AE quidem sectionis BAC, & $\alpha\epsilon$ sectionis $\beta\alpha\gamma$: sit autem transuersæ AE diametro contigua parameter AF, & $\alpha\zeta$ parameter transuersæ diametro $\alpha\epsilon$ contigua. Erunt igitur ad similes AD, $\alpha\delta$ diametros factæ sub AE, AF, & $\alpha\epsilon$, $\alpha\zeta$ figuræ. Dico vt AE ad AF, ita esse $\alpha\epsilon$ ad $\alpha\zeta$.

Sint à sectione BAC ordinatim ad AD diametrum applicatæ binæ BD, GH rectæ: & vt AD ad AH, ita sit $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$: ordinatimque à sectione $\beta\alpha\gamma$ applicentur $\beta\delta$, $\eta\theta$. Quoniam igitur similes ponuntur BAC, $\beta\alpha\gamma$ sectiones, & sunt $\alpha\delta$, $\alpha\theta$ portiones portionibus AD, AH similes; vt AD ad DB, ita erit $\alpha\delta$ ad $\delta\beta$: & vt AH ad HG, ita erit $\alpha\theta$ ad $\theta\eta$. Sed vt AH ad AD, ita est $\alpha\theta$ ad $\alpha\delta$: igitur, ex æquali, vt BD ad GH, ita etiam erit $\beta\delta$ ad $\eta\theta$: & vt BD quadratum ad GH quadra-

tum, hoc est vt EDA rectangulum ad EHA rectangulum, ita erit $\beta\delta$ quadratum ad $\eta\theta$ quadratum, siue ita $\epsilon\delta\alpha$ rectangulum ad $\epsilon\theta\alpha$ rectangulum. Rectanguli autem EDA ad rectangulum EHA ratio composita est ex ratione ED ad EH, & ex ratione AD ad AH: similiter & $\epsilon\delta\alpha$ rectanguli ad $\epsilon\theta\alpha$ rectangulum ratio constat ex rationibus $\epsilon\delta$ ad $\epsilon\theta$, & $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$: ablata igitur æquali vtrobique AD ad AH, & $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$ ratione, erit reliquæ ED ad EH ratio eadem reliquæ $\epsilon\delta$ ad $\epsilon\theta$. Quoniam autem vt AD ad AH, ita est $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$, &, rationis conuersione, vt AD ad DH, ita $\alpha\delta$ ad $\delta\theta$; ex æquali, vt AD ad DE, hoc est vt AD quadratum ad EDA rectangulum, ita erit $\alpha\delta$ ad $\delta\epsilon$, & ita $\alpha\delta$ quadratum ad $\epsilon\delta\alpha$ rectangulum. Sed iam vt BD quadratum ad AD quadratum, ita est $\beta\delta$ quadratum ad $\alpha\delta$ quadratum: quare ex æquali rursus vt EDA rectangulum ad BD quadratum, hoc est vt AE ad AF, ita erit $\epsilon\delta\alpha$ rectangulum ad $\beta\delta$ quadratum, & ita $\alpha\epsilon$ ad $\alpha\zeta$. Quod erat demonstrandum.



THEOR. IV. PROP. IV.

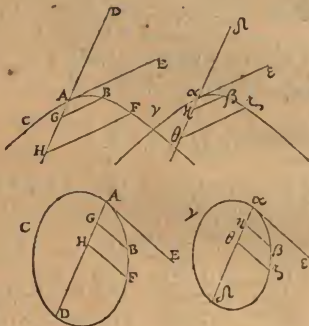
Si in binis hyperbolis, vel binis ellipsibus, ad expositas similes transuersas diametros contiguæ parametri eandem vtrobique teneant rationem; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, BAC, $\beta\alpha\gamma$, earumque transuersæ diametri AD, $\alpha\delta$, & contiguæ parametri AE, $\alpha\epsilon$: sitque $\delta\alpha\epsilon$ angulus angulo DAE æqualis: & vt DA ad AE, ita sit $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$. Dico hyperbolam, vel ellipsim, $\beta\alpha\gamma$ hyberbolæ, vel ellipsi, BAC esse similem.

Sumptis in sectione BAC duobus quibuslibet B & F punctis, ductisque ad AD diametrum, productam vbi opus, rectis BG, FH æquidistantibus AE, vt DA ad AG, ita fiat $\delta\alpha$ ad $\alpha\eta$: vtque DA ad AH, ita fiat $\delta\alpha$ ad $\alpha\theta$: ductæque $\beta\eta$, $\zeta\theta$, æquidistantes

$\alpha\epsilon$,

$\alpha\varepsilon$, ſectioni occurrant in β & ζ. Igitur, quoniam vt D A ad A E, ita eſt D G A rectangulum ad B G quadratum, & ita D H A rectangulum ad F H quadratum: vtque $\delta\alpha$ ad $\alpha\varepsilon$, ita eſt $\delta\eta\alpha$ rectangulum ad $\beta\eta$ quadratum, & ita $\delta\theta\alpha$ rectangulum ad $\zeta\theta$ quadratum; vt D G A rectangulum ad B G quadrâtum, ita erit $\delta\eta\alpha$ rectangulum ad $\beta\eta$ quadratum: & vt D H A rectangulum ad F H quadratum, ita $\delta\theta\alpha$ rectangulum ad $\zeta\theta$ quadratum. Quoniam autem vt D A ad A G, ita eſt $\delta\alpha$ ad ad $\alpha\eta$, componendo, vel diuidendo vbi opus, vt D G ad ad G A, hoc eſt vt D G A rectangulum ad G A quadratum, ita erit $\delta\eta$ ad $\eta\alpha$, ſiue ita rectangulum $\delta\eta\alpha$ ad quadratum $\eta\alpha$. Quare, ex æquali, vt BG quadratum ad G A quadratum, ita erit $\beta\eta$ quadratum ad $\eta\alpha$ quadratum, & vt B G ad G A, ita erit $\beta\eta$ ad $\eta\alpha$. Eademque ratione oſtendetur vt FH ad HA, ita eſſe $\zeta\theta$ ad $\theta\alpha$. Sed, quoniam vt D A ad A G, & D A ad A H, ita eſt $\delta\alpha$ ad $\alpha\eta$, & $\delta\alpha$ ad $\alpha\theta$; ex æquali, vt A G ad A H, ita erit $\alpha\eta$ ad $\alpha\theta$. Vt autem B G ad G A, ita eſt $\beta\eta$ ad $\eta\alpha$: & vt F H ad H A, ita eſt $\zeta\theta$ ad $\theta\alpha$: igitur, ex æquali rurſus, vt B G ad F H, ita erit $\beta\eta$ ad $\zeta\theta$. Suntque tam $\beta\eta$, $\zeta\theta$ ad $\alpha\eta$ diametrum ordinatim applicatæ, quàm B G, F H ad diametrum A G: atque inſuper anguli ad η & θ æquales angulis ad G & H: igitur, ex 2. huius, erit hyperbola, vel ellipſis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, B A C ſimilis. Quod erat demonſtrandum.



COROLL. I.

Itaque, Similes etiam erunt hyperbolæ, vel ellipſes, quarum figuræ ſimiles erunt.

COROLL. II.

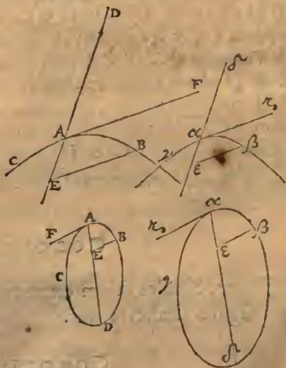
Hinc igitur etiam ſequitur, Si binarum hyperbolarum, vel binarum ellipſium, tranſuerſa & ſecunda coniugatæ diametri æqualiter vtrobique inclinentur inuicem, & candem teneant rationem; alteram alteri ſectionem fore ſimilem.

COROLL. III.

Sed & illud etiam certò ex proximè ostensis constat; Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, figurarum ad non similes diametros factarum latera in eadem vtrobique ratione habeant; etiam & similes eiusmodi diametrorum portiones ad conterminas ordinatim à sectione applicatas in eadem vtrobique ratione habere. Eadem enim omnino erit demonstratio, seposita angulorum ad inuicem comparatione.

THEOR. V. PROP. V.

Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, & rectâ vtrobique à sectione ad expositam diametrum ordinatim applicatâ, eadem sit vtrobique ratio applicatæ ad transuersam diametrum, & ad abscissam eiusdem portionem à vertice: atque etiam angulus vnius applicata, & diametro contentus æqualis sit angulo alterius similiter contento; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis.



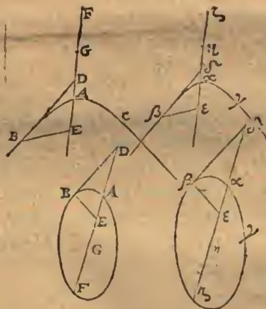
Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, B A C, $\beta\alpha\gamma$, earumque transuersæ diametri A D, $\alpha\delta$: ordinatim autem ductis, BE quidem ad D A diametrum, productam vbi opus, & $\beta\varepsilon$ ad $\delta\alpha$ diametrum, etiam vbi opus productam, vt BE ad E A, & B E ad A D, ita sit $\beta\varepsilon$ ad $\varepsilon\alpha$, & $\beta\varepsilon$ ad $\alpha\delta$: sitque angulus $\beta\varepsilon\alpha$ angulo B E A æqualis. Dico hyperbolam, vel ellipsim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, BAC esse similem.

Ducantur ipsis A D, $\alpha\delta$ transuersis diametris contiguæ parametri A F, $\alpha\zeta$. Quoniam igitur vt D E A rectangulum ad E B quadratum, ita est D A ad A F: & vt $\delta\varepsilon\alpha$ rectangulum ad $\varepsilon\beta$ quadratum, ita est $\delta\alpha$ ad $\alpha\zeta$: vtque BE ad E A, ita est $\beta\varepsilon$ ad $\varepsilon\alpha$: & vt BE ad AD, ita est $\beta\varepsilon$ ad $\alpha\delta$: ideo-

que vt BE ad vtramque DA, AE, hoc est DE, ita est $\beta\epsilon$ ad vtramque $\delta\alpha$, $\alpha\epsilon$ siue $\delta\epsilon$: & compositis rationibus, vt BE quadratum ad DEA rectangulum, ita est $\beta\epsilon$ quadratum ad $\delta\epsilon\alpha$ rectangulum; vt DA ad AF, ita erit $\delta\alpha$ ad $\alpha\zeta$. Estque $\beta\epsilon\alpha$, hoc est $\delta\alpha\zeta$ angulus angulo BEA, siue DAF, æqualis: ideoque & transuersæ AD, $\alpha\delta$ diametri similes: igitur, ex anteced. erit hyperbola, vel ellipsis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, BAC similis. Quod erat demonstrandum.

THEOR. VI. PROP. VI.

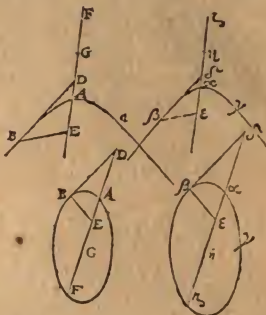
Si sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipses, & vtrobique recta sectionem contingens expositæ diametro occurrat, atque à contactus puncto rectà ad eandem diametrum ordinatim applicatá, eadem vtrobique sit ratio applicatæ ad diametri portiones ab ipsa & contingente ad verticem abscissas: atque etiam angulus vnius ordinatim ductá & diametro contentus æqualis alterius angulo similiter contento; erit altera alteri hyperbola, vel ellipsis, similis.



Sint binę hyperbolæ, vel binæ ellipses, BAC, $\beta\alpha\gamma$, & earum diametri DE, $\delta\epsilon$: contingatq; sectionem BAC in puncto B recta BD diametro occurrens in D: similiterque & sectionem $\beta\alpha\gamma$ contingat in β recta $\beta\delta$ diametro occurrens in δ: sintq; ordinatim ductæ, BE quidem ad DE diametrum, & $\beta\epsilon$ ad diametrum $\delta\epsilon$: vt autem BE ad AE, ita sit $\beta\epsilon$ ad $\alpha\epsilon$: & vt BE ad AD, ita sit $\beta\epsilon$ ad $\alpha\delta$: sitque angulus $\beta\epsilon\alpha$ æqualis angulo BEA. Dico hyperbolam, siue ellipsim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, siue ellipsi, BAC esse similem.

Sint enim sectionum transuersæ diametri AF, $\alpha\zeta$: & centra G, η. Quoniam igitur, vt BE ad AE, ita est $\beta\epsilon$ ad $\alpha\epsilon$: & vt BE ad AD, ita $\beta\epsilon$ ad $\alpha\delta$; vt BE ad vtramque AD, AE, hoc est DE, ita erit $\beta\epsilon$ ad vtramque $\alpha\delta$, $\alpha\epsilon$, siue $\delta\epsilon$: ideoque, ex æquali, vt AE ad ED, ita erit $\alpha\epsilon$ ad $\epsilon\delta$. Sed, ex 25. primi huius, vt AE ad ED, ita

est E G ad E F: & vt αε ad εδ, ita εη ad εζ: igitur vt E G ad E F ita erit εη ad εζ: &, diuidendo, vt E G ad G F, ita erit εη ad ηζ: rursusque diuidendo, vt E A ad A G, ita erit εα ad αη: & vt E A ad duplam A G, hoc est A F, ita erit εα ad αζ. Sed vt B E ad E A, ita est βε ad εα: igitur, ex æquali, vt B E ad A F, ita etiam erit βε ad αζ. Estque βεα angulus æqualis angulo B E A: igitur, ex anteced. erit hyperbola, vel ellipsis, βαγ hyperbolæ, vel ellipsi, B A C similis. Quod erat demonstrandum.



MONITVM.

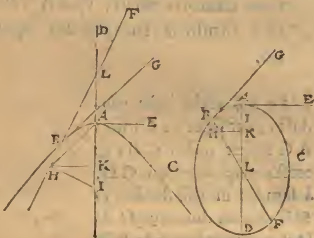
Expositis similium coni sectionum præcipuis & simplicioribus argumentis, satis conueniens iam occurrit instituendum de ipsarum Apolloniana vna, & binis Commandini definitionibus examen: quò tandem prohibetur, & fiat euidens, ipsas binis etiam dissimilibus coni sectionibus aptè conuenire. Quare & primò nobis est paranda trutina, ipsaq; necessarijs suis membris instruenda. Huiusmodi erunt proximè præmittenda theoremata nonnulla, quæ fidem proponendis abstruent. Sed nec omnis ex obliquo nobis incurret hæc disquisitio: siquidem pleraque ad rem præcipuam facientia secum inferet, quæ reuelata suum etiam in huius libri theorematum serie locum meritò obtinere debuisse tibi videbuntur.

THEOR. VII.

THEOR. VII. PROP. VII.

In omni hyperbola, vel ellipſi, maior erit ſemper tranſuerſi axis ratio ad rectam parametrum ipſo minorem, quàm aſſumptæ cuiuſlibet tranſuerſæ diametri ad ſuam contiguam parametrum. Et contra, minor erit ſemper ratio tranſuerſi axis ad rectam parametrum ipſo maiorem, quàm tranſuerſæ cuiuſlibet diametri ad ſibi contiguam parametrum.

Sit hyperbola, vel ellipſis, quæcunque B A C, eiuſque tranſuerſus axis A D, recta parameter A E: ſit autem & eiuſdem aſſumpta quælibet diameter tranſuerſa B F, & eiuſdem contigua parameter B G: ſitque A D primùm major quàm A E. Dico majorem eſſe rationem D A ad A E, quàm FB ad B G.



Ordinatim ad F B diametrum, productam vbi opus, applicetur A H: erectaque ipſi F B perpendiculari H I, quæ axi occurrat in I, ducatur ad axem perpendicularis H K: & ſit ſectionis centrum L. Igitur vt F B ad B G, ita erit F H B rectangulum ad H A quadratum: & vt F H B rectangulum ad H I quadratum, ita erit D A ad A E: & ita L K A rectangulum ad K H quadratum, hoc enim in 60. tertij huius iam oſtenſum eſt. Sed vt L K A rectangulum ad K H quadratum, ſiue L K I rectangulum, ita eſt A K, ad K I: igitur vt D A ad A E, ita erit A K ad K I. Majorque eſt D A quàm A E: igitur & A K major erit quàm K I, & A H major quàm H I: ideoque & A H quadratum quadrato H I majus. Quare major erit F H B rectanguli ad H I quadratum, hoc eſt D A ad A E, ratio, quàm F H B rectanguli ad H A quadratum, hoc eſt quàm F B ad B G.

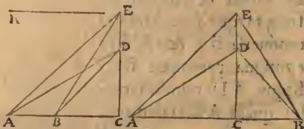
Quando autem tranſuerſus axis D A minor fuerit recta parametro A E, eadem erit demonſtratio. Quoniam enim hoc caſu ſemper minor fiet A K quàm K I, ideoque & H A quadratum quadrato H I minus; minor erit F H B rectanguli ad H I quadratum ratio, hoc eſt D A ad A E, quàm F H B rectanguli ad H A quadratum

hoc eſt quàm F B ad B G. Vtroque igitur caſu conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

Lemma I. Prop. VIII.

Si recta linea terminata producatur, aut ſecetur ita vt ſectæ partes fiant inuicem inæquales, & à productæ termino, aut ſectionis puncto, eidem perpendicularis erigatur, à cuius ſumptis binis punctis ad primò poſitæ lineæ vtrumque terminum rectæ agantur lineæ; major erit à citimo puncto ductarum quadrati majoris ad quadratum minoris ratio, quàm ductarum à remotiore puncto ſimiliter ſumptarum quadrati ad quadratum ratio.

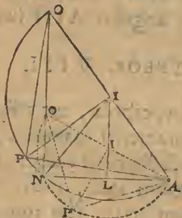
Sit AB recta linea producta, aut ſecta in C: ſitq; A C major quàm C B: & erecta perpendiculari C D, à ſumptis in ipſa duobus D & E punctis ducantur D A, D B, atque etiam EA, E B: & ſit major CE quàm CD. Dico majorem eſſe rationem A D quadrati ad D B quadratum, quàm A E quadrati ad E B quadratum.



Quoniam enim A C major eſt quàm CB, erit & A D major quàm D B: ideoque & A D quadratum quadrato D B majus. Itaque propoſitâ rectâ R, cujus quadratum ſit æquale quadrato D E vnà cum duplo EDC rectangulo, major erit ratio quadrati A D ad quadratum R, quàm quadrati D B ad idem R quadratum: & componendo, major erit ratio quadrati A D ad vtrumque A D & R quadratum, quàm quadrati D B ad vtrumque D B & R quadratum. Quare, permutando, major erit ratio quadrati AD ad quadratum D B, quàm vtriuſque A D & R quadrati ad vtrumque DB & R quadratum. Eſt autem quadratum A E quadratis A D, D E, & duplo E D C rectangulo æquale, hoc eſt æquale duobus A D & R quadratis: quadratumque E B itidem eſt duobus D B, E D quadratis vnà cum duplo eodem E D C rectangulo æquale, hoc eſt æquale duobus D B & R quadratis: major igitur erit A D quadrati ad D B quadratum ratio, quàm A E quadrati ad E B quadratum. Quod erat demonſtrandum.

LEMM. II. PROP. IX.

Si, vt cuiuslibet trianguli ad verticem non rectanguli crurum quadrata ad inuicem, ita sunt respondentes basis partes à perpendiculari à vertice ducta factæ; erunt basis partes inuicem æquales. Sin autem; erunt & basis partes inæquales inuicem.

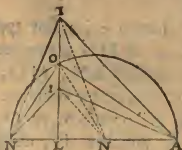


Sit triangulum quodlibet AIN ad verticem non rectangulum: & ducta ab I vertice ad AN basim perpendiculari IL, vt AI quadratum ad IN quadratum, ita sit AL ad LN. Dico AL esse æqualem LN.

Erecta enim perpendiculari NO, quæ productæ AI occurrat in O, vt AI ad IO, hoc est vt AL ad LN, ita erit AI quadratum ad IN quadratum, & ita AI quadratum ad AIO rectangulum: quare quadrato IN erit æquale rectangulum AIO: & vt AI ad IN, ita erit IN ad IO. Erectâ igitur ad AI perpendiculari IP, quæ sit æqualis IN, vt AI ad IP, ita erit IP ad IO: ductisque OP, PA, erit OPA angulus rectus. Sed & rectus est ONA angulus, puncta igitur O, P, N, A in semicirculi erunt circumferentia. Suntque æquales IN, IP: igitur & eiusdem semicirculi centrum erit I: ideoque &, propter perpendicularem IL, erit AL æqualis LN. Quod primò erat demonstrandum.

Non sit autem vt AI quadratum ad IN quadratum, ita AL ad LN. Dico AL, LN esse inuicem inæquales.

Descripto enim supra rectam AN (auctam priùs duplâ LN, si perpendicularis extra IL triangulum cadat) semicirculo cuius circumferentia rectæ LI, vbi opus productæ, occurrat in O, iungantur AO, NO. Quoniam igitur vt AL ad LN, ita est AO quadratum ad ON quadratum, non erit vt AI quadratum ad IN quadratum, ita AO quadratum ad ON quadratum: quare nec æqualia erunt inuicem AI, IN aut AO, NO quadrata: ideoque nec rectæ AI, IN aut AO, ON



inuicem erunt æquales: neque igitur rectæ A L, L N æquales erunt inuicem. Quod 2. erat demonstrandum.

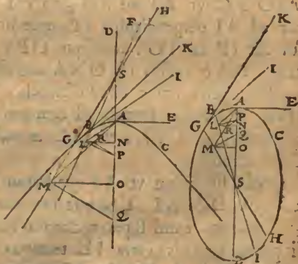
COROLL.

Sequitur igitur ex antecedente, si maior sit ratio A L ad L N, quàm A I quadrati ad I N quadratum, & angulus A I N sit acutus; vt recta A L maior sit quàm L N. Minor autem, si angulus A I N sit obtusus.

THEOR. VIII. PROP. X.

In omni hyperbola, aut ellipsi, transuersum axem habente recta parametro maiorem, maior semper erit transuersæ cuiuslibet diametri eidem axi propioris ad suam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris cuiuslibet ad suam. Et si transuersus axis minor sit recta parametro, etiam & transuersę diametri eidem axi propioris ad suam contiguam parametrum ratio minor erit quàm remotioris ad suam.

Sit hyperbola, vel ellipsis quæcunque B A C, cuius sit axis transuersus A D, & recta parameter A E: sint autem & binæ eiusdem transuersæ diametri quælibet B F, G H, quarum B F sit axi A D propior quàm G H: sitque B I parameter contigua B F, & G K contigua G H: Et sit A D primum maior quàm A E. Dico maiorem esse rationem F B ad B I, quàm H G ad G K.



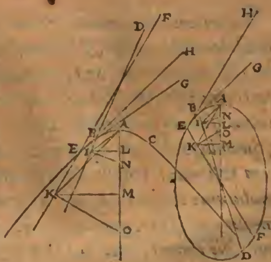
Ordinatim enim sint applicatæ, ad diametrum quidem F B recta A L, & ad H G diametrum recta A M: ductisque ad axem perpendicularibus L N, M O, erigantur L P quidem diametro B F perpendicularis, axique occurrens in P, & M Q diametro H G perpendicularis axi occurrens in Q: in quo autem recta A M rectam N L secat sit punctum R, iungaturque P R: & sit sectionis centrum S. Quoniam igitur vt D A ad A E, ita est, ex 60 tertij huius, F L B rectangulum ad L P quadratum: & ita H M G rectangulum ad M Q quadra-

quadratum: atque etiam, vt in 7 huius ostensum est, ita AN ad NP, & AO ad OQ; vt AN ad NP, ita erit AO ad OQ: & permutando, vt AN ad AO, hoc est vt NR ad OM, ita erit NP ad OQ: rursusque permutando, vt NR ad NP, ita erit OM ad OQ. Suntque anguli ad N & O æquales: igitur angulus NPR angulo OQM æqualis erit. Sed propter vtrumque ad M & L angulum rectum, & MSQ angulum maiorem angulo LSP, erit reliquus SPL angulus reliquo SQM, hoc est NPR, angulo maior: quare minor erit NR quàm NL. Sed AN maior est quàm NP, quoniam & AD maior est quàm AE: igitur, ex 9 huius, maior erit AR quadrati ad RP quadratum, hoc est AM quadrati ad MQ quadratum, ratio, quàm AL quadrati ad LP quadratum. Sed vt MQ quadratum ad HMG rectangulum, ita est LP quadratum ad FLB rectangulum: igitur, ex æquali, maior erit AM quadrati ad HMG rectangulum, hoc est KG ad GH, ratio, quàm AL quadrati ad FLB rectangulum, hoc est quàm IB ad BF. Quare, conuertendo, maior erit ratio FB ad BI, quàm HG ad GK.

At si transuersus axis AD minor fuerit recta parametro AE; quoniam & hoc casu minor semper erit AN quàm NP, & AO quàm OQ, eodem modo ostendetur minorem fore rationem AR quadrati ad RP quadratum, hoc est AM quadrati ad MQ quadratum, quàm AL quadrati ad LP quadratum: ideoq; & minorem fore FLB rectanguli ad AL quadratum, hoc est FB ad BI, rationem, quàm HMG rectanguli ad AM quadratum, hoc est quàm HG ad GK. Quare omnino constat propositum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. IX. PROP. XI.

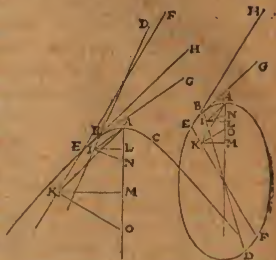
In omni hyperbola, aut ellipsi, maior est ratio transuersæ diametri axi propioris ad suam minorem contiguam parametrum, quàm remotioris cuiuslibet ad suam. Et contra, minor est transuersæ diametri axi propioris ad suam maiorem parametrum contiguam ratio, quàm remotioris ad suam.



Oportet autem, si proposita sectio sit ellipsis, vt binarum diametrorum remotio ab vno eodemque axe sumatur.

Sit igitur proposita quæcunq; hyperbola, vel ellipsis, BAC, cuius sint binæ BD, EF, transuersæ diametri, & eisdem contiguæ parametri BG, EH: sitq; BD axi propior quàm EF, &

maior primùm quàm B G. Dico maiorem esse rationem B D ad B G, quàm E F ad E H.



Sit enim axis sectionis A M; & eius vertex A: ordinatimque applicentur ad B D quidem diametrum recta A I, & ad diametrum E F recta A K: ducanturque I L, K M perpendiculares ad axem, & I N, K O perpendiculares, illa quidem ad B I, & hæc ad K E, quæ axi occurrant in N & O. Quoniam igitur vt B D ad B G, ita est D I B rectangulum ad I A quadratum: & vt D I B rectangulum ad I N quadratum, ita est axis transuersus ad rectam parametrum, & ita A L ad L N, hoc enim ex supra ostensis iam patet: & est B D maior quàm B G, ideoq; & rectangulum D I B quadrato I A maius; minor erit ratio quadrati I A ad quadratum I N, quàm rectanguli D I B ad idem I N quadratum, hoc est quàm A L ad L N. Estque angulus A I N acutus, quoniam & B I N angulus est rectus: igitur, ex coroll. ad 8. huius, erit A L maior quàm L N: ideoque & transuersus axis recta parametro maior erit. Quare &, ex anteced. maior erit B D transuersæ diametri axi propioris ad B G suam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris E F diametri transuersæ ad E H contiguam suam parametrum. Quod 1°. erat demonstrandum.

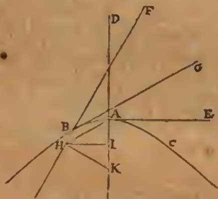
At, si transuersa BD diameter minor sit quàm B G contigua sibi parameter; quoniam & hoc casu maior erit AI quadrati ad quadratum I N ratio, quàm A L ad L N, ideoque minor erit A L quàm L N, atque etiam transuersus axis minor recta parametro: etiam, ex antecedente, minor erit BD transuersæ diametri axi propioris ad BG contiguam parametrum ratio, quàm remotioris E F ad E H. Quare omnino constat propositum. Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

Potuerant certè proximè præmissa tria theoremata generaliùs de sola hyperbola concipi & demonstrari, quàm de combinatis hyperbola & ellipsi simul. Sed, quoniam inter vtramque vt plurimùm satis conuenit, & sunt ipsarum παράλληλα *si non perpetua & continua, saltem frequentia: idcirco, ne adhuc diuortium facerent (quandoquidem ab æqualitatis laterum primariæ figuræ ad inuicem positione, ellipsis illico in circuli circumferentiam transeat) maluimus ibidem parciùs aliquantò de hyperbola meditari, & minus concipere, quò aptiùs de vtraque coniunctim proponeretur. Ne tamen fraus inde fiat hyperbolæ, de ipsa nonnulla insuper proponemus huiusmodi.*

THEOR. X. PROP. XII.

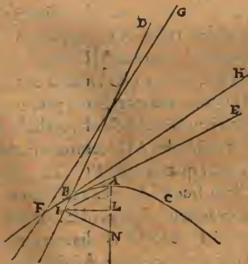
In omni hyperbola transuersum axem habente rectæ parametro æqualem, erunt & omnes transuersæ diametri suis contiguis parametris æquales.



Sit hyperbola B A C, cuius axis transuersus D A æqualis sit A E rectæ parametro: sit autem & transuersa quæcunque diameter F B, eiusdemque contigua parameter B G. Dico FB esse æqualem BG. Ordinatim ad F B diametrum productam applicetur A H: ducanturque H I ad axem perpendicularis, & H K perpendicularis ad F H. Quoniam igitur D A est æqualis A E, erit & A I æqualis I K, & A H æqualis H K: ideoque & A H quadratum quadrato HK æquale. Vt autem D A ad AE, ita est FHB rectangulum ad HK quadratum: vtq; FB ad BG, ita est F H B rectangulum ad AH quadratum: igitur vt D A ad A E, ita etiam erit F B ad BG. Et est DA æqualis AE: quare & FB erit æqualis BG. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XI. PROP. XIII.

Si, in hyperbola, assumpta quælibet transuersa diameter contiguæ sibi parametro sit æqualis; erunt & eiusdem transuersæ omnes diametri contiguis suis parametris ęquales.



Sit hyperbola B A C, eiusque transuersa quælibet diameter BD contiguæ sibi parametro B E æqualis: sumaturque eiusdem alia quæcunque diameter transuersa F G, cuius sit contigua parameter FH. Dico F G esse æqualem FH.

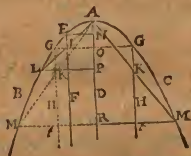
Sit enim sectionis axis AN, eiusq; vertex A: & ad vtramlibet expositam diametrum, vt ad BD, ordinatim applicetur A I: atq; ad axem perpendicularis ducatur IL: sitq; I N eidem B D diametro perpendicularis. Igitur, quoniam vt B D ad B E, ita est D I B rectangulum ad IA quadratum: erit rectangulo D I B æquale quadratum IA. Sed vt D I B rectangulum, hoc est IA

quadratum, ad IN quadratum, ita est AL ad LN: estque, propter angulum BIN rectum, angulus AIN acutus: igitur, ex 9 huius, erit AL æqualis LN. Sed vt AL ad LN, ita est, ex ostensis in 7 huius, transuersus axis ad rectam parametrum: igitur rectæ parametro erit transuersus axis æqualis. Quare, ex anteced. & transuersa FG diameter contiguæ FH parametro æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XII. PROP. XIIII.

In omni hyperbola, veluti & in omni parabola, binarum diametrorum illa axi propior erit, ad quam ordinatæ sub maiore acuto angulo applicabuntur.

Sit primùm parabola BAC, cuius axis AD, eiusque binæ diametri quælibet EF, GH, siue ad easdem axis partes, siue ad diuersas: sint autem ordinatim ductæ ad diametrum quidem EF recta AI, & ad diametrum GH recta AK: & sit angulus AIE acutus maior acuto AKG. Dico diametrum EF axi AD propiorem esse quàm GH.



Productæ AI, AK sectioni occurrant, hæc in M, illa in L: & ad axem applicentur EN, GO, LP, MR. Quoniam igitur AKG, hoc est MAR, angulus minor est angulo AIE, hoc est LAP: abscindet recta AM maiorem sectionis portionem, & maior erit quam AL: quare & MR maior erit quàm dimidia LP: ideoq; & eius dimidia, scilicet GO, maior erit quàm dimidia LP, hoc est EN. Ad AD igitur axem paraboles propiùs accedit EF diameter quàm GH.

Sit iam BAC sectio hyperbola, cuius axis transuersus AD, centrum E, & binæ diametri quæcunque EG, EF, siue ad easdem, siue ad diuersas axis partes: sintque ordinatim ductæ, ad EF diametrum recta AF, & ad EG diametrum recta AG: sit autem angulus AFE acutus maior acuto AGE. Dico diametrum EF axi AD propiorem esse quàm EG: hoc est angulum AEF minorem esse angulo AEG.



productis

Productis enim ad sectionem, A F quidem in H, & A G in I, iungantur D H, D I. Igitur, propter æquales A G, G I, Itemque A F, F H, rectamque A E rectæ E D æqualem, erit D I æquidistans E G, & D H, ęquidistans EF: ideoque & angulus AID æqualis erit angulo A G E, & angulus A H D angulo A F E: quare & angulus AHD angulo AID major erit. Ab ijsdem igitur rectę AD terminis binæ AH, DH rectæ sibi inuicem occurrentes in H sectionis puncto, ad eandem sectionem versus I punctum inclinatæ, & ipsis A I, D I rectis minores, intra triangulum AID concurrent, & singulos ADH & D A H angulos singulis A D I & D A I angulis minores efficient. Estque angulus A D H angulo A E F æqualis, vt & angulus A D I angulo A E G: igitur & angulus A E F angulo A E G minor erit: ideoque & diameter E F ad axem E A propiùs accedet quàm E G. Quod erat demonstrandum.

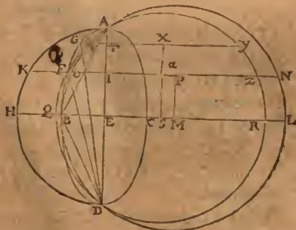
Coroll.

Igitur Quæ in parabola & hyperbola similes ducentur diametri, æqualiter ab axe remouebuntur: & conuersim.

Theor. XIII. Prop. XV.

In omni ellipsi, quæ à majoris axis terminis ad idem sectionis punctum binæ ducentur rectæ lineæ, angulum continebunt recto majorem: maximusque omnium is erit qui ad mediam sectionem fiet: eique propior semper remotiore maior erit. Quę autem à minoris axis terminis ducentur, minorem recto facient angulum: minimusque omnium ad mediam fiet sectionem: & ei propior remotiore semper minor erit.

Sit ellipsis B A C, cujus axis major A D, minor BC, centrum E: & sumpto quolibet in sectione puncto F, ducantur A F, D F: junganturque A B, B D: sumpto autem quolibet etiam alio, in sectione A B, puncto G, quod à media sectione B sit remotius, quàm F, jungantur AG, DG. Dico singulos



ABD, A F D, A G D angulos recto esse majores: omniumque esse

maximum ABD: &, qui ei propior factus est, AFD angulum remotiore AGD esse majorem.

Describatur circa AD diametrum semicirculi circumferentia AHD quæ productum EB axem secet in H: ducaturque ad AD perpendicularis FI, quæ producta ad partes F semicirculi circumferentię occurrat in K: junctæque intelligantur AH, HD, AK, KD. Quoniam igitur AD major est quàm BC; erit & AE, hoc est HE maior quàm BE. Est autem angulus AHD rectus: quare obtusus erit ABD angulus. Quoniam autem vt AE quadratum, ad EB quadratum, ita est AID rectangulum ad IF quadratum: & vt AE quadratum ad EH quadratum, ita est idem AID rectangulum ad IK quadratum, quadratumque HE quadrato BE majus est; erit & quadratum KI quadrato FI majus: rectaque KI major quàm FI. Quare & recto AKD angulo erit major AFD angulus. Similiterq; & recto major ostendetur AGD angulus: Quare singuli ABD, AFD, AGD anguli recto erunt majores. Quod erat demonstrandum.

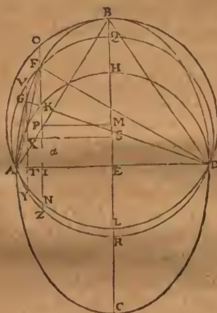
A G T X Y K F O I α P Z N H Q E C S M R L D

Describatur nunc circa ABD triangulum circulus ABDL, cuius sit BL diameter, & centrum M: productaque FI eiusdem circumferentiæ occurrat in N, & O: sitque ad FN perpendicularis MP: & ductæ intelligantur AO, OD. Major igitur est BM quàm OP: &, propter æquales EM, IP, erit & BE major quàm OI: majorque erit PI ad IO ratio, quàm ME ad EB: & componendo major erit PO ad IO, quàm MB ad EB: &, sumptis antecedentium duplis, major NO ad IO ratio, quàm LB ad EB: Igitur diuidendo, major erit NI ad IO ratio, hoc est NIO, siue AID, rectanguli ad IO quadratum ratio, quàm LEB, siue AED, rectanguli ad EB quadratum. Sed vt AED rectangulum ad EB quadratum, ita est AID rectangulum ad IF quadratum: Major igitur erit AID rectanguli ad IO quadratum ratio, quàm ad IF quadratum: quare & IF major erit quàm IO: ideoque & punctum F extra circuli ABDL circumferentiam erit. Quare & obtusus AFD angulus minor erit AOD, hoc est ABD, angulo. Quod 2° erat demonstrandum.

Descripto autem circa AFD triangulum circulo AFQDR, cuius sit diameter QR, & centrum S, ducatur ad AD rectam perpendicularis GT, circuli AFDR circumferentiæ occurrens in V & Y,

rectæque S X æquidistanti AD in X: in quo autem recta FN eandem AFDR circumferentiam secat, sit punctum Z: & in quo rectam SX secat sit punctum α ductæque etiam intelligantur AV, VD. Major igitur est Fα quàm VX: & propter Iα, TX æquales, minor erit TV quàm IF; ideoque & major erit XT ad TV ratio, quàm αI ad IF: componendoque major XV ad TV, quàm αF ad IF: &, sumptis antecedentium duplis, major YV ad TV, quàm ZF ad IF: Quare, diuidendo, major erit YT ad TV, hoc est YTV, siue ATD, rectanguli ad TV quadratum, ratio, quàm ZIF, siue AID, rectanguli ad IF quadratum. Sed vt AID rectangulum ad IF quadratum, ita est ATD rectangulum ad TG quadratum: Major igitur erit ratio ATD rectanguli ad TV quadratum, quàm ad TG quadratum: Ideoque & minor erit TG quàm TV. Quare punctum G extra circuli AVFDR circumferentiam erit. Itaque & minor erit AGD angulus angulo AFD. Quod vltimò erat demonstrandum.

Nec aliter, omnibus permutatis, abs minoris axis AD terminis inclinatæ ad sectionem binæ DF, AF atq; etiam DG, AG lineæ minores recto probabuntur singulos continere DFA, DGA angulos: & omnium minimum esse DBA angulum qui ad mediam sectionem fit: atque ei propiorem vt DFA angulum remotiore vt DGA etiam semper esse minorem.



COROLL.

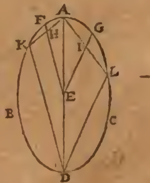
Hinc fit euidens Binorum punctorum in ellipsi ad quæ à maioris axis terminis inclinatæ lineæ angulos constituunt, illud à minori axe remotius esse, & alterutri maioris axis termino propius, in quo minor consistit angulus. Et contrarium euenire inclinatis ad eadem ipsa sectionis puncta ab vtroque minoris axis termino lineis.

[illegible]

THEOR. XIV. PROP. XVI.

In omni ellipsi, binarum diametrorum illa maiori axi propior erit, ad quam ordinatæ sub minore obtuso angulo applicabuntur: & minori axi illa erit propior, ad quam ordinatæ sub maiore acuto angulo ducentur.

Sit ellipsis quæcunque BAC, cujus axis primùm maior AD, centrum E, eiusdemque binæ quælibet diametri EF, EG, siue ad easdem, siue ad diuersas axis AD partes: sitque ad EF diametrum ordinatim applicata AH, & ad EG diametrum ordinatim ducta AI: sit autem angulus AHE minor angulo AIE. Dico EF diametrum axi ED propiorem esse, quàm EG: hoc est angulum AEF minorem esse angulo AEG.



Productis enim ad sectionem, AH quidem in K, & AI in L: ductisque DK, DL, erit DK æquidistans EF, & DL æquidistans EG, ideoque & angulus AKD angulo AHE erit æqualis, & angulus ALD æqualis angulo AIE: Minor igitur erit angulus AKD angulo ALD. Sed & vterque AKD, ALD angulus, ex anteced. erit obtusus: &, ex eiusdem coroll. punctum K propius erit axis termino A quàm punctum L: Erit igitur DK axi propior quàm DL: ideoque & angulus ADK, hoc est AEF, minor erit angulo ADL, hoc est AEG: & diameter EF axi AD propior erit quàm EG. Quod 1° erat demonstrandum.

Sit jam ellipsis BAC minor axis BC, & centrum E, eiusq; binæ diametri EF, EG: sitq; ad diametrum EF ordinatim ducta BH, & ad EG diametrum ducta ordinatim BI: atq; angulus BHE minor sit angulo BIE. Dico diametrum EF ab axe BC remotiorem esse quàm EG.



Productis enim, vt supra, BH in K, & BI in L, ductisque CK, CL, erit angulus BKC acutus minor acuto BLC: quare & punctum K remotius erit ab axis minoris termino B quàm punctum L: ideoque & angulus BCK, hoc est BEF, maior erit angulo BCL, hoc est BEG: Quare & diameter EF ab axe BC remotior erit quàm EG. Quod 2° erat demonstrandum.

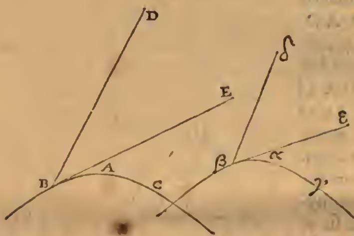
COROLL.

Hinc etiam, & hoc fit euidens. Similes diametros æqualiter ab vno eodemque ellipseos axe remoueri & conuersim.

THEOR. XV. PROP. XVII.

Si ſint binæ hyperbolæ, & vtrobique aſſumptæ cuilibet tranſuerſæ diametro contigua parameter ſit æqualis; erit altera alteri hyperbola ſimilis.

Sint binę hyperbolę BAC, βαγ: ſitque hyperbolę BAC expoſita quælibet diameter tranſuerſa BD, & eidem contigua para-



meter BE: ſimiliter & hyperbolæ βαγ ſit aſſumpta quæcunque tranſuerſa diameter βδ, eidemque contigua parameter βε: ſitque BD æqualis BE, & βδ æqualis βε. Dico hyperbolam βαγ hyperbolæ BAC eſſe ſimilem.

Quoniam enim in hyperbola BAC tranſuerſa BD diameter contiguæ BE parametro æqualis eſt; erunt, ex 13 huius, & omnes ejuſdem tranſuerſæ diametri ſuis contiguis parametris æquales: ideoque & axis tranſuerſus rectę parametro æqualis. Sed & eadem ratione erunt hyperbolæ βαγ tranſuerſæ omnes diametri contiguis ſuis parametris ęquales, atque ideo & tranſuerſus axis rectę parametro ęqualis: igitur ex 4 huius, erit altera alteri hyperbola ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Itaque, Si binæ hyperbolæ coniugatas diametros, tranſuerſam ſcilicet & ſecundam, æquales inuicem habeant vtrobique; erit etiam altera alteri hyperbola ſimilis.

transuersam & secundam, siue conjugatas diametros in eadem ad inuicem ratione habeant, sed non æqualiter vtrobique inuicem inclinatas, neq;, si sint hyperbolæ, inuicem vtrobiq; æquales; non erit dictarum sectionum altera alteri similis.

MONITVM.

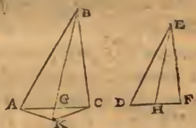
Vtique iam ex supra demonstratis satìs patet, quantum à vera similium hyperbolarum aut ellipsium definitione absint Apolloniana Eutocij vna, & binæ Commandini similium eiusmodi sectionum definitiones, quæ & binis etiam dissimilibus hyperbolis, aut ellipsibus, quales in proxime antecedente tum Propositione, tum Corollario, sunt propositæ, aptè conuenire possint. Quandoquidem si eiusmodi dissimiles hyperbolæ, siue ellipses, figurarum latera, vel transuersam & secundam conjugatas diametros, vtrobique in eadem ratione habeant; etiam & similes diametri à vertice portiones ad conterminas ordinatim à sectione applicatas, ideoq; ipsasmet etiam applicatas ad inuicem eodem ordine sumptas in eadem vtrobique ratione habebunt, vt ex 4 huius ibidem appositum Coroll. 3 certò pronunciauit. Quanquam igitur vtrobique sit æquidistantium basi, aut cuipiam ordinatim applicatæ, numero æqualium ad conterminas diametri portiones à vertice abscissas, atque etiam abscissarum ad inuicem eadem ratio; quæ Apollonij similium Conicarum linearum, vel similium Coni-sectionum definitio est, ideoq; & vtrobique eadem sit laterum figuræ ad inuicem ratio, atque etiam eadem vtrobique transuersæ & secundæ diametrorum conjugatarum ad inuicem, quæ sunt Commandini ambæ similium hyperbolarum aut ellipsium definitiones: Nihilo tamen magìs similes dicentur binæ sectiones aut portiones ab ijsdem concessis, nisi si angulorum ab ordinatim applicatis aut æquidistantibus vnius factorum cum alterius similiter constitutis angulis, æqualitas etiam probetur: hoc est nisi factæ vtrobique sectionis figuræ similes sint inuicem: aut propositæ ordinatim applicatæ ad similes diametros vtrobique constituantur: veluti si exposita vtrobique diameter etiam axis sit. Quoniam autem, quod suprà notauimus, qualibet assumpta sectionis diameter etiam principalis ejusdem sectionis diameter, siue diameter ex generatione, vel ex coni sectione dici possit, facta scilicet saltem in cono scaleno ab aliquo plano non ad rectos basi angulos secto: Idcirco & circa quamlibet diametrum

de earundem inuicem coni-sectionum, atque etiam de similium examine & notitia generalis nobis visa est instituenda tractatio. Cui nequaquam factura sint satis neque Apolloniana, neque Commandini ambæ meritò à nobis damnatæ definitiones, quarum caussa huc vsque aliquantum digressi jam in viam redimus.

Lemma III. Prop. XIX.

Si sint bina triangula ad verticem æquiangula, & rectâ vtrobique à vertice ad mediam basim ductâ, sint vnius anguli ad mediam basim facti singuli singulis alterius trianguli angulis ad mediam basim factis æquales; erit alterum alteri triangulum simile.

Sint bina triangula ABC, DEF, quorum verticales ad B & E anguli sint inuicem æquales, sectisq; AC, DF basibus bifariam, illa in G, hac in H, ducantur BG, EH. Sit autem angulus BGC angulo EHF æqualis, vt & angulus BGA angulo EHD. Dico triangulum DEF triangulo ABC esse simile.



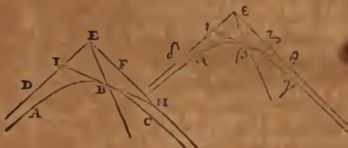
Producta enim BG in K, vt sit AG ad GK, veluti EH ad HF, erit triangulum AGK triangulo EHF simile: & angulus AKG angulo EFH æqualis erit: vt autem CG ad GA, ita est FH ad HD; & vt AG ad GK, ita est EH ad HD: Igitur ex æquali, vt CG ad GK, ita erit EH ad HD. Et sunt æquales ad G & H anguli: Triangulum igitur CGK triangulo EHD etiam simile erit: quare & CKG angulus angulo EDH, erit æqualis. Angulus igitur AKC, duobus EFD, EDF angulis erit æqualis: & additis æqualibus ABC, DEF angulis, erunt bini AKC, ABC tribus D, E, F angulis, hoc est duobus rectis æquales: quare & reliqui bini BAK, BCK anguli duobus etiam rectis æquales erunt: ideoque & A, B, K, C puncta in circuli circumferentia erunt: quare & angulus BAC, angulo BKC, hoc est angulo EDF æqualis erit: & angulus BCA angulo BKA, hoc est reliquo EFD angulo, etiam æqualis. Triangulum igitur DEF triangulo ABC simile erit. Quod erat demonstrandum.

Theor.

THEOR. XVII. PROP. XX.

Si binæ hyperbolæ æqualibus Aſymptoton angulis contineantur. Erit altera alteri hyperbola ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ ABC, $\alpha\beta\gamma$ quarum aſymptoti, vnius ED, EF, alterius $\iota\delta$, $\iota\zeta$: ſit autem angulus $\delta\epsilon\zeta$ angulo DEF æqualis. Dico hyperbolam $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ ABC eſſe ſimilem.



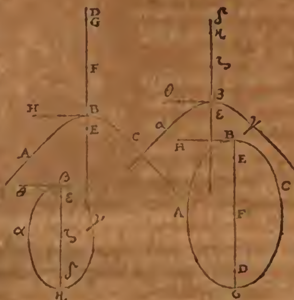
Exhibita enim hyperbolæ ABC diametro quacunq; EB, quæ ſectioni occurrat in B, ducatur per B ſectionem contingens recta IBH, vtraque aſymptoto terminata in I & H. Inueniaturque in hyperbola $\alpha\beta\gamma$ diameter ad quam ordinatæ in angulo ipſi EBH æquali applicentur, ſitque diameter eiuſmodi $\epsilon\beta$: ducaturq; recta $\iota\beta\theta$ ſectionem contingens in β. Erit igitur angulus $\epsilon\beta\theta$ angulo EBH æqualis. Ideoque & reliquus $\epsilon\beta\iota$ reliquo EBI æqualis. Quoniam autem recta IBH ſectionem contingit in B vtrinque aſymptoto terminata; erit in eodem B puncto biſariam ſecta ex Coroll. 2 ad 39. primi huius. Eademq; ratione & recta $\iota\beta\theta$ bifariam erit ſecta in β. Suntque ſinguli in media baſe ad β punctum facti anguli ſingulis ad B in media baſe factis angulis æquales, & verticalis $\iota\epsilon\theta$ verticali IBH etiam æqualis: triangulum igitur $\iota\epsilon\theta$ triangulo IBH ſimile erit, ex antecedente. Quare vt EB ad BH, ita erit $\epsilon\beta$ ad $\beta\theta$, & vt EB quadratum ad BH quadratum, hoc eſt vt tranſuerſa ſectionis, ſiue hyperbolæ ABC, diameter, ſcilicet dupla EB, ad contiguam parametrum: ita erit $\epsilon\beta$ quadratum ad $\beta\theta$ quadratum, ſcilicet ita tranſuerſa hyperbolæ $\alpha\beta\gamma$ diameter, nempe dupla $\epsilon\beta$, ad contiguam parametrum. Et ſunt $\epsilon\beta$, EB ſimiles vtrobique diametri. Igitur, ex 4 huius, erit altera alteri hyperbola ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

ex coroll. prop. 38

THEOR. XVIII. PROP. XXI.

Si binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses, interceptas vtrobique axis portiones vtroque vmbilico & vertice in eadem inuicem ratione habuerint; erit altera alteri hyperbola, aut ellipsis, similis.

Sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipses ABC $\alpha\beta\gamma$, quarum vertices B & β: Vmbilici vnius D, E, alterius, δ, ϵ: & sit vt DB ad BE, ita $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$. Dico hyperbolam, aut ellipsim, $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ, aut ellipsi, ABC esse similem.



Secetur enim vtraque DE, $\delta\epsilon$ bifariam, illa in F, hæc in ζ: erunt F & ζ puncta centra sectionum. Sumptisque FG æquali FB, atque etiam $\zeta\eta$ æquali $\zeta\beta$, erunt BG, $\beta\eta$ axes transuersi, rectaq; GD rectæ BE æqualis, vt & recta $\delta\eta$, rectæ $\beta\epsilon$. Quoniam igitur vt DB ad BE, ita est $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: erit vt rectangulum DBE, hoc est GEB, ad quadratum BE, ita rectangulum $\delta\beta\epsilon$, siue $\eta\epsilon\beta$, ad quadratum $\beta\epsilon$, & antecedentium quadrupla. Rectangulo igitur quadruplo GEB ponatur æquale rectangulum GBH. Itemq; quadruplo $\eta\epsilon\beta$ rectangulo, fiat æquale rectangulum $\eta\beta\theta$. Quoniam quadranti figuræ ad GB axem transuersum sectionis ABC constitutæ, æquale est rectangulum GEB, & recta GB transuersum est figuræ latus; erit, ex conuers. 58 primi huius, & BH eiusdem coefficiens, siue recta sectionis parameter. Similiter & $\beta\theta$ recta erit sectionis $\alpha\beta\gamma$ parameter, cuius sit $\eta\beta$ transuersus axis. Eritque rursus vt rectangulum GBH ad BE quadratum, ita rectangulum $\eta\beta\theta$ ad quadratum $\beta\epsilon$. Ratio autem rectanguli GBH ad quadratum BE, composita est ex rationibus GB ad BE, & HB ad BE. Similiter & ratio rectanguli $\eta\beta\theta$ ad quadratum $\beta\epsilon$, composita est ex ratione $\eta\beta$ ad $\beta\epsilon$, & $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$. Sed quoniam vt DB ad BE, ita est $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: & in hyperbolis diuidendo, in ellipsibus autem componendo, vt GB ad BE, ita est $\eta\beta$ ad $\beta\epsilon$; ablatis æqualibus GB ad BE, & $\eta\beta$ ad $\beta\epsilon$ rationibus, eadem remanebit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ ratio, quæ BH ad BE. Ex æquali igitur

eadem erit $\beta\theta$ ad $\beta\eta$, rectæ scilicet parametri sectionis $\alpha\beta\gamma$, ad transuersum axem ratio, quę BH rectę parametri sectionis A B C ad BG axem trásuersum. Quare, per 4 huius, erit hyperbola, vel ellipsis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipsi, BAC similis. Quod erat demonstrandum.

ALITER.

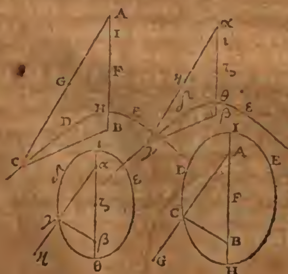
Absque rationum compositione aut diuisione.

Quoniam vt DB ad BE, ita est $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: erit in hyperbolis diuidendo, & in ellipsibus componendo, vt D B ad B G, ita $\delta\beta$ ad $\beta\eta$. Sumpta autem BH eiusmodi, vt GBH rectangulum sit rectanguli DBE, siue GEB quadruplum, & sumpta $\beta\theta$ ita, vt rectangulum $\eta\beta\theta$ sit etiam rectanguli $\delta\beta\epsilon$, siue $\eta\epsilon\beta$, quadruplum: cum sit BG transuersus axis; erit B H recta sectionis parameter. Similiter & $\beta\theta$ recta sectionis erit parameter. eritq; vtrobiq; vt DB ad BG, ita BH ad BE 4. Et vt $\delta\beta$ ad $\beta\eta$, ita $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ 4. Sed iam ostensum est vt DB ad BG, ita esse $\delta\beta$ ad $\beta\eta$. Igitur vt BH ad BE 4, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ 4. Et vt BH ad B E, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$. Sed rursus quoniam vt DB ad BE, ita est $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: & in hyperbola diuidendo, aut in ellipsi componendo, vt BG ad B E, ita est $\beta\eta$ ad $\beta\epsilon$: ex æquali vt BH ad BG, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\eta$. vtrobique scilicet eadem rectæ parametri ad transuersum axem ratio. Quare, per 4 huius, erit altera alteri sectio similis.

THEOR. XIX. PROP. XXII.

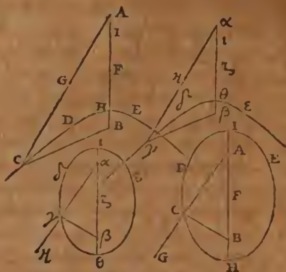
Si binorum similium triangulorum bina homologa latera ponantur hyperbolarum aut ellipsium axes vtrisque vmbilicis intercepti, & vtrobique angulus præassumpto lateri oppositus à sectionis linea vel diuidi intelligatur, vel tangi; erit binarum huiusmodi hyperbolarum, vel ellipsium, altera alteri similis.

Satis autem constat pro binis hyperbolis proposita bina triangula non debere esse æquilatera. Neque, si isoscelia sint, bases ipsorum deputari debere hyperbolarum axibus.



Sint bina triangula similia ABC, $\alpha\beta\gamma$, quorum homologa latera AB, $\alpha\beta$ reputentur hyperbolarum aut ellipsium axes, vtrisque vmbilicis qui sint A, B, & α, β, intercepti: secet autem vel contingat angulum ACB sectionis linea,

vt & altera ſectionis linea angulum $\alpha\gamma\beta$: & ſint eiuſmodi ſectiones CDE, $\gamma\delta\epsilon$, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſes. Dico $\gamma\delta\epsilon$ hyperbolam, ſiue ellipſim, hyperpolæ, ſiue ellipſi, CDE eſſe ſimilem.



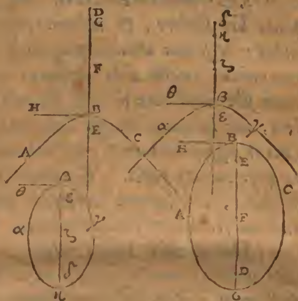
Secetur vtraque A B, $\alpha\beta$, bifariam illa in F, hęc in ζ: & à maiori AC rectę CB ęqualis pro hyperbola ſecetur, aut eidem pro ellipſi apponatur C G: ſimiliterque à maiori $\alpha\gamma$, minori $\gamma\beta$ æqualis ſecetur, aut eidem apponatur $\gamma\eta$: reſiduæque pro hyperbola, aut pro ellipſi compoſitæ AG dimidio æquales ſumantur, vtrinque ab F, rectæ FH, FI: ſimiliter & reſiduæ, vel compoſitæ $\alpha\eta$ æquales ſumantur $\zeta\theta$, $\zeta\iota$: eruntque rurſus pro hyperbola reſiduæ, vel pro ellipſi additæ AI, HB, rectæ inuicem æquales. Similiter & reſiduæ vel additæ $\alpha\iota$, $\theta\beta$, erunt æquales inuicem. Atqui poſitis A & B vmbilicis, & C puncto in ſectione, manifeſtum eſt maiorem AC pro hyperbola ſuperare debere minorem CB quantitate tranſuerſi axis, & pro ellipſi ambas AC, CB ſimul maiori axi debere eſſe æquales: hoc enim è 51 primi huius conſtat: quare vtroq; caſu erit reſidua vel compoſita A G tranſuerſo axi æqualis: ſimiliterque & reſidua vel compoſita $\alpha\eta$ tranſuerſo axi æqualis erit. Eſt autem ipſi A G æqualis H I, & rectę $\alpha\eta$ æqualis $\theta\iota$: quare & ipſæ H I, $\theta\iota$ ſectionum erunt tranſuerſi axes, & puncta H, I, vt & θ, ι earundem vertices qui in hyperbolis dicuntur contrapoſiti. Quoniam autem vt AB ad BC, hoc eſt ad CG, ita eſt $\alpha\beta$ ad $\beta\gamma$, ſiue ad $\gamma\eta$: & vt AB ad AC, ita etiam eſt $\alpha\beta$ ad $\alpha\gamma$: vt AB ad AG hoc eſt H I, ita erit $\alpha\beta$ ad $\alpha\eta$, ſiue ad $\theta\iota$: & diuidendo vt AB ad vtramque A I, BH, ita erit $\alpha\beta$, ad vtramq; $\alpha\iota$, $\beta\theta$: ſumptiſque conſequentium dimidiis, & in hyperbolis diuidendo, in ellipſibus autem componendo, vt A H ad HB, ita erit $\alpha\theta$ ad $\theta\beta$, & ſunt ſectionum CDE, $\gamma\delta\epsilon$, vertices H, θ: & vmbilici A & B: itemque α & β. Quare, ex anteced. erit altera alteri ſectio, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, eadem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. XX. PROP. XXIII.

Si in binis hyperbolis, aut binis ellipſibus, eadem fuerit vtrobique rectæ parametri ad axis partem vertice, & homologo vmbilico interceptam ratio; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, ABC, αβγ, quarum vertices B & β: ſitque recta parameter vnius BH, & eiuſdem à foco proximo diſtantia BE. Similiterque recta alterius parameter ſit βθ, focique proximi diſtantia βε: vt autem BH ad BE, ita ſit βθ ad βε. Dico hyperbolam, ſiue ellipſim, αβγ hyperbolæ, ſiue ellipſi, ABC eſſe ſimilem.



Exponatur vtrobiq; tranſuerſus axis, & in eo focus remotus, ſitque ſectionis A B C tranſuerſus axis BG, & focus remotus D: & ſectionis αβγ ſit tranſuerſus axis βκ, focuſque remotus δ. Igitur quoniam, ex definit. & 58 primi huius, quadranti figuræ, ſeu rectanguli ſub GB, BH, æquale eſt rectangulum GEB, ſiue DBE: ſimiliter & quadranti rectanguli κβ, βθ æquale eſt rectangulum κεβ, ſiue δβε; vt DB ad GB, ita erit BH quadrans ad BE: & ita BH ad BE quadruplam. Similiter vt δβ ad κβ, ita erit βθ quadrans ad βε: & ita βθ ad βε quadruplam. Sed vt BH ad BE, ita eſt βθ ad βε. Igitur eſt vt BH ad BE quadruplam, ita erit βθ ad βε quadruplam. Ideoque vt DB ad GB, ita etiam erit δβ ad κβ. Et diuidendo vt DB ad DG, ſiue BE, ita erit δβ ad δκ, ſiue βε. Suntq; D, E, itemque δ, ε vmbilici, & vertices ζ, β. Igitur, ex 24 huius, erit propoſitarum ſectionum altera alteri ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

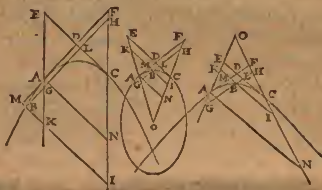
MONITVM.

Equidem ſæpiſsimè euenire poteſt vt per data aliquot in plano puncta coni ſectio aliqua vel deſcribenda ſit, vel ſaltem, quaſi ſit deſcripta, nomine & ſpecie proponatur dignoſcenda: veluti ſi per aliquot vmbrarum terminos in pla-

no aliquo vno eodemque die notatos eiusdem diei quispiam Parallelum à Sole descriptum in eodem plano describere & repræsentare velit : vel saltem ex ijsdem, aut similibus, notatis terminis nomen sectionis & speciem determinare, vt eidem similem aliam vbilibet per datos totidem terminos in plano similiter ad inuicem constitutos exhibere valeat. Idque nunc primùm nobis occurrit meditari, & notandum ac discutiendum suscipere. Dum adhuc igitur circa similium coni sectionum agri culturam versamur, ab eodem alioqui breui recessuri, & vomerem educturi, eidem conterminum hunc agellum priùs hìc findere, & aliquot insignes glebas ibidem vertere libuit: ne si non omninò proprium hìc locum habuisse, saltem non minùs quàm alibi deinceps in toto hoc opere incommodum sibi vindicare potuisse specialem hanc, sed maximè vtilem, nec iniucundam per data puncta describendarum, aut saltem dignoscendarum coni sectionum disquisitionem conqueri quis meritò possit. Quoniam autem non quotlibet puncta similiter, totidemque vtrobique posita vtramque per eadem ductam sectionem semper nomine & specie efficiunt cognitam; Idcircò nobis inquirendum duximus quot plurima similiter vtrobiq; puncta posita similitudinem sectionum per eadem ductarum aut ducendarum euincant. Vnde tandem etiam tutò licebit per data quinque puncta aptè proposita vnamquamq; sectionem primùm determinare, deinde describere. Quamquam & per data tantùm quatuor binæ situ & quantitate differentes notæ fiant, ideoq; & describi possint parabolæ. Illud idem de vnica ellipsi per quinque puncta describenda non satis cautè proposuit olim, quamquam via analytiqua rectè explicuit, sed operosè nimis construendum reliquit Pappus lib. 8. Mathem. Collect. Siquidem per data quinque puncta aliqua sola describetur parabola, per alia quinque sola hyperbola, per quinque alia; sola ellipsis, & per totidem alia, sola circuli circumferentia. Quod ex sequentibus fiet manifestum.

THEOR. XXI. PROP. XXIV.

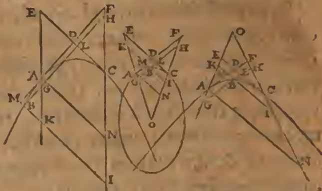
Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, binæ contingant lineæ inuicem occurrentes, & à quolibet in sectione puncto rectæ contingentibus æquidistantes ducantur donec diametris per tactus ductis occurrant; erunt vtrobique triangula à diametris & contingentibus facta inuicem æqualia: atq; etiam quadrilatera vtrobique inter sectionem & diametrum constituta triangulis reciprocè ab æquidistantibus factis æqualia.



Sit coni sectio, vel circuli circumferentia, A B C, quam in A & C binæ contingant lineæ AD, CD inuicem occurrentes in D: sintque diametri per tactus ductæ AE, CF: productaque AD occurrat diametro CF in F: & CD producta occurrat AE diametro in E. Sumpto autem quolibet B puncto in sectione, ducantur GBH æquidistans AD, diametrisque occurrens in G & H, & contingenti CD in L, & IBK æquidistans CD, occurrensque diametris in I & K, & contingenti AD in M. Dico tam triangulum CDF triangulo ADE çquale esse, quam quadrilaterum BMFH triangulo AMK, atque etiam quadrilaterum BLEK, excessum scilicet trianguli GLE supra triangulum GBK, triangulo CLH esse çquale.

Ducatur ab alterutro tactus puncto, vt A, ad oppositam diametrum recta AN oppositæ contingenti çquidistans. Et, si quidem diametri AE, CF inuicem concurrunt, sit concursus in O. Quoniam igitur in parabola, vt in 28 primi huius demonstratum est, triangulo AFN çquale est parallelogrammum EN: ablato communi AD CN quadrilatero, erit reliquum ADE triangulum reliquo CDF triangulo æquale. In hyperbola autem & ellipsi, veluti in circuli circumferentia, quemadmodum iam in 29 primi huius iam demonstratum est, quoniam vt NO quadratum ad OC quadratum, hoc est, vt NAO triangulum ad triangulum CEO, ita est NO ad OF, hoc est, ita NAO triangulum ad FAO triangulum: erit triangulum AFO triangulo CEO æquale: quare ablato communi

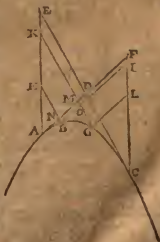
quadrilatero FDEO, erit reliquum CDF triangulum reliquo ADE triangulo æquale. Quod 1° erat demonſtrandum.



Quoniam autem, vt in ijſdem 28 & 29 primi huius iam oſtenſum eſt etiam, triangulo GBK æquale eſt quadrilaterum GAFH: communi ablato vel addito GAMB quadrilatero, erit reliquum aut compoſitum BMFH quadrilaterum, reliquo aut compoſito AMK triangulo æquale. Similiter & propter quadrilaterum ICEK triangulo IBH æquale, ablato communi ICLB quadrilatero, erit reliquum BLEK quadrilaterum reliquo CLH triangulo æquale. Vel etiam, vt in aliquo caſu, ablato communi quinquelatero IKGLC, erit reliquum GLE triangulum duobus BGK, CLH triangulis ſimul æquale. Quare & quadrilaterum BLEK, exceſſus ſcilicet trianguli GLE ſupra BGK triangulum, reliquo CLH triangulo æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXII. PROP. XXV.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam, binæ contingant lineæ inuicem occurrentes, & à binis quibuſlibet in ſectione punctis ad vtraſque diametros per tactus ductas rectæ contingentibus æquidiſtantes vtrobique ducantur; erunt vtrobique ab æquidiſtantibus ad diametrum conſtituta quadrilatera inuicem æqualia.



Sit coni ſectio, vel etiam circuli circumferentia ABC, quam contingant in A & C binæ rectæ AD, CD inuicem occurrentes in D: ſintque diametri AE, CF, quibus occurrant AD in F, & CD in E: ſumptis autem binis quibuſlibet in ſectione punctis B & G, ducantur vtriſque AD, CD contingentibus æquidiſtantes BH, BI, itemque GK, GL: ſitque illarum occurſus in O. Dico quadrilaterum GOIL quadrilatero BOKH eſſe æquale.

In quo GK ſecat AD, ſit punctum M: & in quo eandem ſecat BH, ſit punctum N. In quo autem ſe inuicem

ſecant

secant BI, GK, sit punctum O. Igitur, ex anteced. triangulo AMK æquale est quadrilaterum MGLF, & triangulo ANH æquale quadrilaterum NBIF. Ambo igitur BK & BF quadrilatera vni MGLF quadrilatero sunt æqualia. Commune auferatur MOIF quadrilaterum. Reliquum igitur GOIL quadrilaterum reliquo BOKH quadrilatero erit æquale. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXIII. PROP. XXVI.

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, binæ rectæ inuicem sese secantes ducantur; vt erunt contingentium ipsis æquidistantium, vtrobique à tactu ad communem occursum sumptarum, quadrata inuicem: ita erunt sub respondentium intra sectionem ductarum segmentis rectangula inuicem.



Sit coni sectio, aut etiam circuli circumferentia ABC, & in ipsa binæ AC, BD rectæ sese inuicem secantes in E. Sectionem autem contingat primùm in B, recta BH æquidistans AC: similiter & in C contingat sectionem recta CI æquidistans BD, contingentique BH occurrens in K. Dico vt quadratum BK ad quadratum CK, ita esse rectangulum AEC ad rectangulum BED.

Ducantur per tactus B & C, diametri IBF, HCG contingentibus occurrentes in H & I. Et rectis AC, BD in F & G.

Quoniam igitur vt BK quadratum ad triangulum BKI, ita est totum FC quadratum ad totum FCI triangulum: & ita ablatum FE quadratum ad ablatum FEB triangulum: atque etiam ita reliquum AEC rectangulum ad reliquum ECIB quadrilaterum; Et vt CK quadratum ad CKH triangulum, hoc est, ex 24 huius, ad triangulum BKI, ita est totum GB quadratum ad totum GBH triangulum: & ita ablatum GE quadratum ad ablatum GEC triangulum: atque etiam ita reliquum BED rectangulum ad reliquum EBHC, hoc est ECIB quadrilaterum; Erit, ex æquali, vt BK quadratum ad CK quadratum, ita rectangulum AEC ad rectangulum BED. Quod 1o. erat demonstrandum.

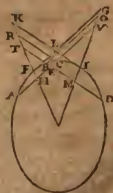
At si contactus puncta non etiam sint in sectione ductarum termini, vt in 2a figura. Ducantur ipsis AC, BD æquidistantes FG, IK

ſectionem contingentes in F & I, ſibique inuicem occurrentes in L. Ducantur etiam diametri KFH, GIM occurrentes contingentibus in G & K, & ipſis AC, BD rectis, in H & M. A punctis autem B & C ipſis AC, BD rurſus æquidiſtantes ducantur BO, CR diametris occurrentes, BO quidem in N & O, & CR in S & R. Sitque ambarum occurſus in vno P ſectionis puncto. Et in quo diameter FH ſecat BD ſit punctum T, in quo autem IM diameter ſecat AC ſit punctum V. Oſtendendum eſt igitur vt FL quadratum ad IL quadratum, ita eſſe rectangulum AEC ad rectangulum BED.



Quoniam enim rurſus vt FL quadratum, ad triangulum FLK, ita eſt totum HC quadratum ad totum HCR triangulum: & ita ablatum HE quadratum ad ablatum HET triangulum: & ita reliquum AEC rectangulum ad reliquum ECRT quadrilaterum; Et vt IL quadratum ad triangulum ILG, hoc eſt FLK, ita eſt totum MB quadratum ad totum MBO triangulum: & ita ablatum ME quadratum ad ablatum MEV triangulum: atque adhuc ita reliquum BED rectangulum ad reliquum EBOV quadrilaterum; Cum ſit quadrilaterum EBOV quadrilatero ECRT æquale, propter æqualia invicem, ex 28 & 29 primi huius, bina BTN, NPR, atque etiam bina CVS, SPO triangula, & communem ETNPSV ſex laterum figuram; Erit etiam rurſus ex æquali vt FL quadratum ad IL quadratum: ita AEC rectangulum ad rectangulum BED. Quod 2° erat demonſtrandum.

Habeant autem abs terminis interſectarum ductæ contingentibus æquidiſtantes ſingularia in ſectione puncta vt in 3ª fig. Eodem modo oſtendetur, vt IL quadratum ad ILG triangulum, ita eſſe rectangulum BED ad quadrilaterum EBOV: & vt FL quadratum ad FLK, hoc eſt ILG triangulum, ita eſſe rectangulum AEC ad quadrilaterum ECRT. Sed propter æqualia ex anteced. CO, BR quadrilatera, & commune BC quadrilaterum, erunt EBOV, ECRT quadrilatera inuicem æqualia. Idcirco adhuc, ex æquali, vt FL quadratum ad IL quadratum, ita erit AEC rectangulum ad BED rectangulum. Quod 3° erat demonſtrandum.



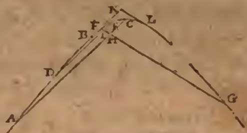
Nec ſecus in reliquis caſibus pene innumeris, pro varijs rectarum

AC, BD positionibus ad inuicem, procedet demonstratio per æqualia semper & vtrobique siue ablatiua, siue addititia ad communem aliquam figuram triangula aut quadrilatera. Quare omnino constat propositum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXIV. PROP. XXVII.

Si in coni sectione, veluti & in circuli circumferentia, binæ rectæ æquidistantes inuicem ducantur, quas secet recta aliqua etiam in sectione ducta; erunt sub æquidistantium segmentis facta rectangula inuicem vt respondentia sub secantis segmentis rectangula inuicem.

Sit coni sectio, aut etiam circuli circumferentia ABC, & in ipsa binæ æquidistantes ductæ AC, DE quas secet FG intra sectionem ducta in H & I. Dico vt rectãgulum AHC ad rectangulum DIE. Ita esse FHG rectangulum ad rectangulum FIG.



Ducatur ipsis AC, DE æquidistans BK sectionem contingens in B: ducaturq; LK æquidistans FG, sectionemque contingens in L. Sitque contingentium BK, LK occursus in K. Igitur, ex anteced. vt BK quadratum ad LK quadratum, ita erit rectangulum AHC ad rectangulum FHG: sed & ita etiam rectangulum DIE ad rectangulum FIG. Igitur permutando vt rectangulum AHC ad rectangulum DIE, ita erit rectangulum FHG ad rectangulum FIG. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Igitur, Si binarum quarumcunque rectarum terminatarum inuicem se secantium, ideoque & bina rectangula constituentium, alterutri à sumpto quolibet alio puncto ducatur æquidistans quæ alteram secet: & ad sectionis punctum constituat bina rectangula in eadem inuicem ratione in qua primùm facta rectangula similiter sumpta inuicem, & permutatim; erunt ductarum termini omnes in eadem aliqua coni sectione.

MONITVM.

Hoc postremum theorema propositum generalem meruit

demonstrationem. Parabola tamen & circuli circumferentia suas habent speciales & proprias, circuli quidem circumferentia suam ab æqualitate rectangulorum sub conterminis segmentis. At parabola suam à propriis aliis mediis deductam. Jllam etiam hîc adnectere non iniucundum fore existimauimus cum ipsis medijs, tum ob insignem eorum circa parabolica siue theoremata siue problemata vtilitatem, tum quod ipsorum vnum quodlibet ad sequentia satìs aptum & commodè assumi posse nobis visum est.

THEOR. XXV. PROP. XXVIII.

Si in parabola binæ æquidistantes rectæ ducantur quas secet ducta ab aliquo in sectione puncto recta diametro æquidistans; erunt sub æquidistantium segmentis facta rectangula inuicem, veluti portiones rectæ ad ipsas ductæ à sectione similiter sumptæ inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipsa binæ AC, DE inuicem æquidistantes: à sumpto autem quolibet in sectione puncto B, ducatur DF diametro æquidistans, quæ occurrat AC in F, & secet DE in G. Dico vt BF ad BG, ita esse AFC rectangulum ad DGE rectangulum.

Si quidem enim BF diameter est, iam constat propositum.

Sin autem; Secetur vtraque AC, DE bifariam, illa in L, hæc in K & iuncta IK producatur ad sectionem in H. Erit igitur HI diameter. Ducatur ad ipsam recta BL æquidistans AC. Igitur vt HI ad HL, ita est quadratum IC ad quadratum LB: & diuidendo vt IL, hoc est BF, ad HL, ita est AFC rectangulum ad BL quadratum. Similiter vt HK ad HL, ita est quadratum KE ad LB, siue KG, quadratum. Et diuidendo vt KL, hoc est BG, ad HL, ita est rectangulum DGE ad quadratum LB. Igitur ex æquali vt BF ad BG, ita erit rectangulum AFC ad rectangulum DGE. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

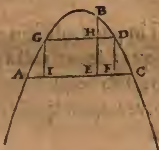
Hinc fit manifestum si rectangula sub partibus æquidistantium in sectione ductarum à qualibet recta ad ipsas à

sectione ducta, quæ sit diametro æquidistans, factis sunt inuicem veluti rectæ diametro æquidistantis portiones à sectione similiter sumptæ inuicem; Eiusmodi sectionem esse parabolam. Atque etiam si in binas æquidistantes rectas terminatas recta quæpiam à quolibet puncto ducatur ei quæ æquidistantes bifariam diuidit æquidistans, faciensque portiones eodem puncto & vtraq; æquidistante interceptas in eadem inuicem ratione in qua rectangula sub æquidistantium segmentis facta inuicem similiter sumpta; Assumptum punctum in eadem cum æquidistantium terminis parabola esse.

THEOR. XXVI. PROP. XXIX.

Si in parabola recta quæpiam ducatur ad quam à duobus in sectione punctis binæ rectæ ducantur diametro æquidistantes; Erunt sub segmentis in primùm ducta factis rectangula inuicem, veluti ipsæ æquidistantes similiter sumptæ inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipsa ducta AC. A sumptis autem binis quibuslibet in sectione punctis B, & D ducantur binæ BE, DF rectæ diametro æquidistantes. Dico vt BE ad DF, ita esse rectangulum AEC ad rectangulum AFC.



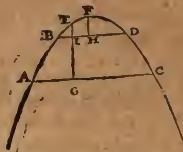
Ducatur intra sectionem recta DG æquidistans AC, secansq; BE in H: ducaturq; GI æquidistans BE. Igitur, ex antecedente, vt BE ad BH, ita est rectangulum AEC, ad rectangulum GHD, hoc est IEF. Quare diuidendo vt BE ad HE, hoc est DF, ita erit rectangulum AEC ad rectangulum AFC. Quod erat demonstrandum.

[illegible] DDdd [illegible]

THEOR. XXVII. PROP. XXX.

Si in parabola binæ æquidiſtantes rectæ ducantur ad quas ſingulas à binis quibuſlibet in ſectione punctis ſingulæ ducantur lineæ diametro æquidiſtantes; erunt ſub ſegmentis æquidiſtantium facta rectangula inuicem, veluti rectę à ſectione ad ipſas ductæ inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipſa binæ rectæ æquidiſtantes AC, BD, ad quas à binis quibuſlibet E, & F punctis ducantur binæ EG, FH diametro æquidiſtantes. Dico vt EG ad FH, ita eſſe rectangulum AGC, ad rectangulum BHD.

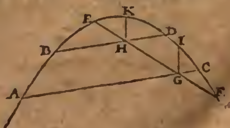


Secet enim alterutra EG, aut FH, ſaltem producta, rectam BD in I, rectæ AC occurrens in G. Igitur, ex 28 huius, vt EG ad EI, ita erit rectangulum AGC, ad rectangulum BID. Sed, ex antecedente, vt EI ad FH, ita eſt BID rectangulum ad rectangulum BHD. Igitur, ex æquali, vt EG ad FH, ita erit rectangulum AGC ad rectangulum BHD. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXVIII. PROP. XXXI.

Si in parabola binæ rectæ æquidiſtantes inuicem ducantur quas ſecet recta aliqua etiam intra ſectionem ducta; erunt ſub æquidiſtantium ſegmentis facta rectangula inuicem, vt reſpondentia ſub ſecantis ſegmentis rectangula inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipſa binæ æquidiſtantes ductæ AC, BD, quas ſecet EF intra ſectionem ducta in G & H. Dico vt rectangulum AGC ad rectangulum BHD, ita eſſe rectangulum EGF ad rectangulum EHF.



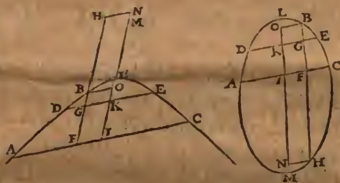
Educantur enim ad ſectionem diametro æquidiſtantes GI, HK. Igitur, ex antecedente, vt GI ad HK, ita eſt rectangulum AGC ad rectangulum BHD. Sed, ex 29. huius, vt GI ad HK, ita eſt rectangulum EGF ad rectangulum EHF.

Igitur vt AGC rectangulum ad rectangulum BID, ita erit EGF rectangulum ad EHF rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIX. PROP. XXXII.

Si in hyperbola, velut & in ellypſi, atque in circuli circumferentia, binæ rectæ æquidiſtantes inuicem ducantur, quas ſecet ducta ab aliquo in ſectione puncto recta diametro eaſdem biſariam diuidenti ęquidiſtans, & ad oppoſitam ſectionem perducta; vt erunt rectangula ſub æquidiſtantium ſegmentis facta inuicem, ita erunt rectangula ſub æquidiſtantis diametro partibus vtrâque ſectarum ęquidiſtantium, & vtroque in ſectione termino interceptis, ſimiliter ſumpta inuicem.

Sit hyperbola, veluti & ellipſis, aut etiam circuli circumferentia, ABC, & in ipſa binæ AC, DE æquidiſtantes inuicem. A ſumpto autem quolibet in ſectione puncto B, ducatur BF diametro rectas AC, DE biſariam diuidenti æquidiſtans (niſi ſi ipſa DF ſit diameter) quę rectam AC diuidat in F, rectamque DE ſecet in G, & producta ſectioni (quæ, in hyperbola, oppoſita dicitur) occurrat in H. Dico vt rectangulum AFC ad rectangulum DGE, ita eſſe rectangulum HFB ad rectangulum HGB. Hoc autem in ellipſi, vt & in circuli circumferentia, iam conſtat ex demonſtratis in 27. huius. In hyperbola autem idem ſic oſtendetur.



Si quidem BF diameter eſt, iam conſtat propoſitum.

Sin autem; Sectis AC, DE biſariam in I & K, iungatur IK, & producatur donec oppoſitis verticibus occurrat in L & M, & rectis HN, BO æquidiſtantibus AC in N, & O. Igitur cum ſit vt MKL rectangulum ad KE quadratum, ita MOL rectangulum ad OB ſiue KG quadratum, ſcilicet vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; ita etiam erit reliquum NKO, ſiue HGB rectangulum ad reliquum DGE rectangulum. Similiter cum ſit vt totum MIL rectangulum ad totum IC quadratum, ita ablatum MOL rectangulum ad ablatum OB, ſiue IF quadratum; & ita etiam reliquum

NIO, siue HFB rectangulum ad reliquum AFC rectangulum; Vt rectangulum AFC, ad rectangulum HFB, ita erit rectangulum DGE ad rectangulum HGB. Et permutando vt AFC rectangulum ad DGE rectangulum, ita erit HFB rectangulum ad rectanlum HGB. Quod erat demonstrandum.

COROLL. I.

Itaque, Si propositis quatuor veluti A, D, E, C punctis, quorum bina AC, DE, rectę ęquidistantes iungant, per quodlibet aliud punctum B ducatur HBGF recta ipsas AC, DE ęquidistantes bisecanti, vt IK, ęquidistans, faciensq; rectangula HFB, HGB inuicem veluti AFC, DGE rectangula inuicem; certò concludetur, & eadem via, sed retrograda, demonstrabitur puncta H, B in eadem per A, D, E, C sectione, siue hyperbola, siue ellypsi, vel etiam circuli circumferentia, esse.

COROLL. II.

Hinc etiam patet in propositis sectionibus, veluti & in circuli circumferentia, rectangulum sub partibus cuiuslibet ęquidistantis diametro vtroque in sectione termino, & recta intra sectionem ducta interceptis ad rectangulum sub partibus rectę intra sectionem ductę, se habere veluti transuersa sectionis diameter ad contiguam parametrum. Ostensum est enim rectangulum HGB ad rectangulum DGE se habere veluti rectangulum MKL ad KE quadratum; & rectangulum HFB ad rectangulum AFC esse vt rectangulum MIL ad quadratum IC, hoc est vtrobique vt transuersa sectionis diameter ad contiguam parametrum.

COROLL. III.

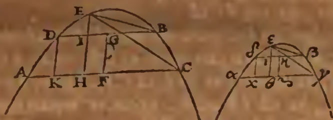
Atque etiam fit manifestum, si maior sit rectangulorum sub partibus ęquidistantium in sectione ductarum à qualibet recta à sectione ad ipsas ducta, quę diameter sit, aut diametro ęquidistans, factis, maioris scilicet ad minus, ratio quam diametri aut diametro ęquidistantis portionum à sectione similiter sumptarum ad inuicem; eiusmodi sectionem

nem hyperbolam esse. Et contra, si minor sit sub ęquidistantium partibus maioris rectanguli ad minus ratio, quàm portionum diametri, aut diametro ęquidistantis, á sectione similiter sumptarum ad inuicem, sectionem eiusmodi aut ellipsim esse, aut circuli circumferentiam. Siquidem, in hyperbola, vt HFB rectangulum ad rectangulum HGB, ita est rectangulum AFC ad rectangulum DGB. Sed minor est ratio BF ad BG, hoc est BFH rectanguli ad BG,FH rectangulum, quàm rectanguli BFH ad rectangulum BGH: nam & GH minor est quàm FH. Igitur maior erit rectanguli AFC ad rectangulum DGE ratio, quàm rectę BF ad rectam BG. Hoc autem in ellipsi, veluti & in circuli circumferentia, contrario modo se habet. Siquidem illic GH maior est quàm FH.

THEOR. XXIX. PROP. XXXIII.

Si sint binę coni sectiones, & vtrobique quina in sectione puncta notata: sint autem vnius puncta ad inuicem similiter posita alterius punctis ad inuicem; erit altera alteri sectio similis.

Sint binæ coni sectiones ABC, $\alpha\beta\gamma$, sintque in sectione ABC notata quinque A,D,E,B,C puncta: & totidem in sectione $\alpha\beta\gamma$ notata $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$. Sit autem figura $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$ punctis terminata similis figuræ pũctis A,D,E,B,C terminatæ. Dico coni sectionem $\alpha\beta\gamma$, coni sectioni ABC, esse similem.



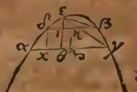
Iungantur AC, DB: & primùm inuicem æquidistent. Similiter, igitur iunctæ $\alpha\gamma$, $\delta\beta$, inuicem æquidistabunt. Sectis itaque AC, DB itemque $\alpha\gamma$, $\delta\beta$ bifariam, illis in F & G, his in ζ & η, iunctæ FG, $\zeta\eta$ sectionum erunt diametri. Eisdem æquidistantes à punctis E & ϵ ducantur rectæ EH, $\epsilon\theta$, (nisi si ijsdem E & ϵ punctis occurrant productæ FG, $\zeta\eta$ diametri.) Occurratque EH rectæ AC in H, rectam DB secans in I. Similiter & recta $\epsilon\theta$ rectæ $\alpha\gamma$ occurrat in θ, secans $\delta\beta$ in ι. Ducatur autem DK æquidistans EH, iunganturque AD, EC, EB. Similiter & ducta $\delta\kappa$ æquidistante $\epsilon\theta$, iungantur $\alpha\delta$, $\epsilon\gamma$, $\epsilon\beta$.

Sitq; primùm, vt EH ad EI, ita rectangulum AHC ad rectan-

gulum DIB. Erit igitur, ex coroll. ad 28. hujus, ABC sectio parabola. Ostendendum est igitur, & $\alpha\beta\gamma$ sectionem parabolam esse: & idcirco sectioni ABC esse similem.

Quoniam igitur, propter similitudinem, vt AC ad AD, ita est $\alpha\gamma$ ad $\alpha\delta$; & vt AD ad DB, ita est $\alpha\delta$ ad $\delta\beta$, ex æquali, vt AC ad DB, ita erit $\alpha\gamma$ ad $\delta\beta$: & sumptis dimidijs, vt AF ad DG, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\delta\eta$: & diuidendo, ac per conuersionem rationis, vt AF ad AK, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\alpha\kappa$. Sed vt AF ad AD, ita est $\alpha\zeta$ ad $\alpha\delta$. Igitur, ex æquali, vt AK ad AD, ita erit $\alpha\kappa$ ad $\alpha\delta$. Suntque ad A & α anguli æquales: triangulum igitur $\delta\alpha\kappa$ triangulo DAK erit simile. Ideoque & angulus $\alpha\kappa\delta$ angulo AKD æqualis erit, & angulus $\epsilon\theta\gamma$ angulo EHC. Sed & æqualis etiam $\epsilon\gamma\theta$ angulus angulo ECH. Triangulum igitur $\epsilon\gamma\theta$, triangulo ECH etiam simile erit. Quare vt EC ad CH, ita erit $\epsilon\gamma$ ad $\gamma\theta$ Sed vt AC ad CE, ita, propter similitudinem figurarum, est $\alpha\gamma$ ad $\gamma\epsilon$. Igitur, ex æquali, vt AC ad CH, ita erit $\alpha\gamma$ ad $\gamma\theta$: & diuidendo vt AH ad HC, hoc est vt AHC rectangulum ad HC quadratum, ita erit $\alpha\theta$ ad $\theta\gamma$, hoc est, ita $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\theta\gamma$ quadratum. Sed, quoniam vt EB ad BI, ita, propter similitudinem triangulorum EBI, $\epsilon\beta\iota$, est $\epsilon\beta$, ad $\beta\iota$; & vt DB ad BE, ita est, propter similitudinem figurarum, $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$; ex æquali, vt DB ad BI, ita erit $\delta\beta$ ad $\beta\iota$: & diuidendo, vt DI ad IB, hoc est vt DIB rectangulum ad IB quadratum, ita erit $\delta\iota$ ad $\iota\beta$, hoc est $\delta\iota\beta$ rectangulum ad $\iota\beta$ quadratum.

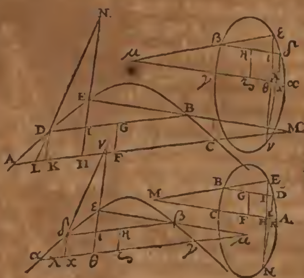




Quoniam autem vt AC ad DB, ita est $\alpha\gamma$ ad $\delta\beta$: vtque AC ad CH, ita est $\alpha\gamma$ ad $\gamma\theta$; ex æquali, vt DB ad CH, ita erit $\delta\beta$ ad $\gamma\theta$. Sed vt DB ad BI, ita est $\delta\beta$ ad $\beta\iota$. Igitur, ex æquali rursus, vt CH ad BI, ita erit $\gamma\theta$ ad $\beta\iota$; & vt CH quadratum ad BI quadratum, ita erit $\theta\gamma$ quadratum ad $\beta\iota$ quadratum. Sed iam vt AHC rectangulum ad HC quadratum, ita est $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\theta\gamma$ quadratum: & vt DIB rectangulum ad IB quadratum, ita est $\delta\iota\beta$ rectangulum ad $\beta\iota$ quadratum; igitur vt AHC rectangulum ad DIB rectangulum, ita erit $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\delta\iota\beta$ rectangulum. Vt autem CH ad BI, ita est $\gamma\theta$ ad $\beta\iota$, & vt CH ad HE, ita est $\gamma\theta$ ad $\theta\epsilon$. Igitur, ex æquali, vt HE ad BI, ita erit $\theta\epsilon$ ad $\beta\iota$. Sed vt BI ad IE, ita est $\beta\iota$ ad $\iota\epsilon$. Igitur, ex æquali rursus, vt HE ad IE, ita erit $\theta\epsilon$ ad $\iota\epsilon$. Sed vt HE ad IE, ita est rectangulum AHC ad rectangulum DIB, hoc est ita rectangulum $\alpha\theta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\beta$. Igitur vt $\theta\epsilon$ ad $\iota\epsilon$, ita etiam erit $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\delta\iota\beta$ rectangulum. Quare, ex coroll. ad 28. huius, erit $\alpha\beta\gamma$ sectio etiam parabola. Ideoque ex 1²

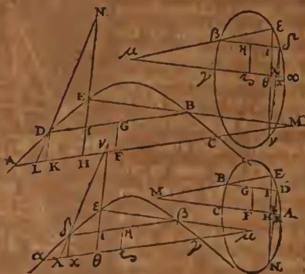
huius, sectioni siue parabolæ ABC similis. Quod 1° erat demonstrandum.

Sit autem iam maior minorue EH ad EI ratio, quàm rectanguli AHC ad rectangulum DIB. Ideoque sit, ex antecedente coroll. 3. sectio ABC hyperbola, vel ellipsis, aut etiam circuli circumferentia. Ostendendum est sectionem $\alpha\beta\gamma$ etiam hyperbolam esse, aut ellipsim, hyperbolæ, aut ellipsi ABC similem. Vel etiam circuli circumferentiam esse.

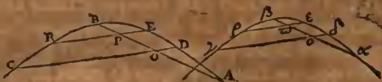


Sint eadem quæ in primis figuris. Et si quidem IB non minor est quàm DI: iungatur EB, & producatur donec productæ AC occurrat in M. Rectanguloque AHC æquale ponatur rectangulum MHL. Erit igitur HL maior vel minor quàm DI, hoc est HK. (nam si æqualis foret, eadem etiam foret MHK, hoc est AHC rectanguli ad BID rectangulum ratio, quæ EH ad EI, essetque ABC sectio parabola, quod non ponitur.) Iuncta igitur LD, & producta, prout opus, productæ HE occurret. Sit occursus in N. Quoniam autem, ex iam ostensis, vt HE ad IE, ita est $\theta\epsilon$ ad $\iota\epsilon$, & vt rectangulum AHC ad rectangulum DIB, ita est rectangulum $\alpha\theta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\beta$: maiorque est vel minor HE ad IE ratio, quàm rectanguli AHC ad rectangulum DIB; igitur & maior erit vel minor $\theta\epsilon$ ad $\iota\epsilon$ ratio, quàm rectanguli $\alpha\theta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\beta$. Ideoque & sectio $\alpha\beta\gamma$ etiam erit vel hyperbola, vel ellipsis, aut etiam circuli circumferentia. Igitur & producta $\gamma\iota\beta$ donec productæ $\alpha\gamma$ occurrat in μ, factoque rectangulo $\mu\theta\lambda$ æquali rectangulo $\alpha\theta\gamma$, erit $\theta\lambda$ maior minorue quàm $\theta\varkappa$, siue $\delta\iota$. Et idcirco iuncta $\lambda\delta$ & producta productæ $\theta\epsilon$ occurret. Sit etiam occursus in V. Erunt igitur triangula $\epsilon\theta\mu$, $\epsilon\iota\beta$ singula singulis EHM, EIB triangulis similia, atque etiam triangula $\nu\theta\lambda$, $\nu\iota\delta$, triangulis NHL, NID. Quare vt NH ad HL, ita erit $\nu\theta$ ad $\theta\lambda$: & vt EH ad HM, ita erit $\epsilon\theta$ ad $\theta\mu$: &, rationum compositione, vt MHL, siue AHC rectangulum ad NHE rectangulum, ita erit $\mu\theta\lambda$ siue $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\nu\theta\epsilon$ rectangulum. Et, eadem ratione, vt DIB rectangulum ad NIE rectangulum, ita erit $\delta\iota\beta$ rectangulum ad $\nu\iota\epsilon$ rectangulum. Sed vt NH ad HL, ita est NI ad ID: vtque EH ad HM, ita est EI ad IB: ideoque vt rectangulum MHL, siue AHC, ad rectangulum NHE, ita est rectangulum DIB ad rectan-

gulum NIE: eademque ratione vt rectangulum $\mu\theta\lambda$, siue $\alpha\theta\gamma$, ad rectangulum $\nu\theta\epsilon$, ita est rectangulum $\delta\iota\beta$ ad rectangulum $\nu\iota\epsilon$. Igitur vtrobique erit, ex coroll. 1. anteced. tam punctum ν in eadem sectione $\alpha\beta\gamma$, saltem opposita, quàm punctum N in eadem sectione ABC, saltem opposita. Sed vt NHE rectangulum ad AHC rectangulum, ita est, ex 2. coroll. anteced. transuersa sectionis ABC diameter rectæ N H æquidistans ad contiguam parametrum; & vt $\nu\theta\epsilon$ rectangulum ad $\alpha\theta\gamma$ rectangulum, ita etiam est, ex eodem corollario 2. anteced. transuersa sectionis $\alpha\beta\gamma$ diameter æquidistans rectæ $\nu\theta$, ad contiguam parametrum. Igitur vt transuersa sectionis ABC diameter ad contiguam parametrum, ita sectionis $\alpha\beta\gamma$ transuersa diameter ad suam contiguam parametrum. Et sunt anguli AHN $\alpha\theta\gamma$, vtrobique scilicet ab ordinatim applicatis facti, inuicem æquales. Quare, ex 4 huius, erit altera alteri sectio, siue hyperbola, siue ellipsis, aut etiam circuli circumferentia, similis. Quod 2° erat demonstrandum.



At si datorum quinque A,D,E,B,C, aut quinque $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$ punctorum neutra binis æquidistantibus rectis lineis iungantur; Iunctis AB, DC inuicem in O puncto se secantibus, ducatur ER æquidistans DC, quę rectam AB secet in P, & sectioni occurrat in R. Similiter & iunctis $\alpha\beta,\delta\gamma$ se inuicem in o secantibus, ducatur $\epsilon\rho$ æquidistans $\delta\gamma$ sectioni occurrens in ρ, & rectam $\alpha\beta$ secans in π. Quoniam igitur puncta $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$ similiter sunt posita punctis A,D,E,B,C; erunt & rectæ $\alpha\beta,\delta\gamma$ similiter positæ rectis AB, DC. Quare vt AO ad OD, & BO ad OC, hoc est vt rectãgulum AOB ad rectãgulum DOC, ita erit αo ad $o\delta$, & ita βo ad $o\gamma$, hoc est ita rectangulum $\alpha o\beta$ ad rectangulum $\delta o\gamma$. Sed, ex 27 huius, vt AOB rectangulum ad DOC rectangulum, ita est APB rectangulum ad EPR rectangulum: & vt $\alpha o\beta$ rectangulum ad $\delta o\gamma$ rectangulum, ita est $\alpha\pi\beta$ rectangulum ad rectangulum $\epsilon\pi\rho$. Quare vt APB rectangulum ad rectangulum EPR,



[illegible] rectangulum ad [illegible] rectangulum. Iniun[illegible] [illegible] sectione si[illegible] [illegible] ADEBC se[illegible] [illegible] rectis [illegible] similiter data, [illegible] concluditur [illegible] ABC, siue hyperbole, siue ellipsis, aut [illegible] esse similem. Quare omnimode constat propositum. Quod erat demonstrandum.

COROLL.

Ex proxime demonstratis, etiamque satis patet pro varia quinti cuiuslibet puncti ad quatuor reliqua positione propositarum binarum sectionum utramque primum nomine distingui, deinde & specie innotescere, ideoque, & tum ad specialem speciem, tum ad absolutam sectionum determinationem, quinque ad minimum punctorum notam positionem esse necessariam. Alioqui per data quatuor puncta, quanquam binæ tantum describi possunt parabolæ, innumeræ tamen specie differentes, siue hyperbolæ, siue ellipses transire possunt, ideoque & describi.

PROBL. I. PROP. XXXIV.

Datis in plano quinque punctis, quæ totidem notatis in plano aliquo umbræ diametri terminis sint similiter posita, per eadem convenientem coni sectionem describere, quæ diametrum soli parallelum repræsentet: ideoque & lineatæ super eodem plano ab umbræ acumine coni sectioni similis sit.

Constat autem quinque puncta, si non omnia in recta sint linea, ita esse debere ad invicem posita, ut cum bina quævis recta iungentur linea, reliquorum aut includant, aut in directum habeant.

Sint itaque data quinque A, B, C, D, E puncta, & primum ipsorum quatuor aliqua, ut A, E, B, D, sint binarum parallelarum termini, iunctæq; AE, BD

bifariàm fecentur, illa in F, hæc in G. Iuncta igitur FG diameter erit fectionis per A,B,C,D,E puncta defcribendæ. Eidem æquidiftans à reliquo C puncto ducatur CH occurrens AE in H, fecanfque BD in I. Si quidem igitur vt AHE rectangulum ad rectangulum BID, ita eft CH ad CI, erit, ex coroll. ad 28 hujus, quælibet per A,B,C,D,E puncta coni fectio parabola. Quare fi vt differentia quadratorum FE, GD ad quadratum GD, ita hæc FG ad GK: erit punctum K vertex defcribendæ paraboles, & ipfa KF diameter ad quam ordinatim erunt applicatæ AE, BD rectæ, e quibus datis, ex fupra oftenfis, facile parabola defcribetur. Sed & eadem ratione concludetur quinque notatos vmbræ diurnæ terminos etiam in parabola effe. Quare exhibita AKE fectio, fiue parabola, formatæ ab vmbræ acumine fectioni fimilis erit. Ideoque & hoc primo cafu problemati erit fatisfactum.



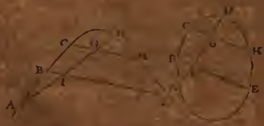
Non fit autem, reliquis iifdem pofitis, eadem rectanguli AHE ad rectangulum BID ratio, quæ rectæ CH ad rectam CI, fed vel maior vel minor. Erunt igitur, ex coroll. 3 ad 32 hujus, puncta A,B,C,D,E in hyperbola, vel in ellipfi, aut etiam in circuli circumferentia. Iuncta igitur CB,& producta (fi quidem BI non fit minor quàm DI, alias enim iungenda effet CD) occurrat productæ EA in K: rectanguloque AHE æquale ponatur KHL rectangulum: & iuncta LD producatur donec productæ, prout opus, HC occurrat in M,



(Occurret autem, quoniam maior minorue eft HL quam DI, vt in antecedente oftenfum eft.) Productæque FG prout opus occurrant in O & N rectæ CO, MN æquidiftantes AE. Et vt KID rectangulum ad MIC rectangulum, ita fiat quadratum CO ad quadratum ex X: atque ad NO rectam comparetur ex vtraq; parte rectangulum vel parallelogrammum æquale quadrato ex X, quod pro hyperbola quidem deficiat, pro ellipfi autem, veluti & pro circuli circumferentia, excedat quadrato vel parallelogrammo figuræ MO æquiangulo, & fint defectus aut exceffus ad puncta P & R. Et è datis PR tranfuerfa diametro, & CO ordinatim applicata, vel ratione tranfuerfæ PR diametri ad contiguum in angulo POC parametrum eadem quæ X quadrati, hoc eft POR rectanguli, ad OC quadratum, defcribatur, ex fupra oftenfis, fiue hyperbola, fiue ellipfis,

vel etiam circuli circumferentia. Dico descriptam eiusmodi sectionem, cuius sit PQ transuersa diameter, punctum C in sectione, atque CO ordinatim applicata, per dicta quatuor reliqua A, B, D, E puncta etiam transire, & problemati satisfacere. Quoniam enim vt MH ad HL, ita est MI ad ID, & vt CH ad HK, ita est CI ad IB, erit composita rectanguli MHC ad rectangulum MIC ratio eadem compositæ KHL, hoc est AHE, rectanguli ad rectangulum BID rationi. Quare, permutando, vt MIC rectangulum ad BID rectangulum, ita erit MHC rectangulum ad AHE rectangulum. Sed vt MIC, hoc est NGO, rectangulum ad BID rectangulum, ita est quadratum ex X, hoc est POR rectangulum, ad OC, hoc est GI, quadratum: atque etiam ita compositum PGR rectangulum ad compositum GD quadratum. Eademque ratione vt reliquum MHC, siue MO, rectangulum ad reliquum AHE rectangulum, ita esse ostendetur totum PFR rectangulum ad totum FE quadratum. Igitur & in sectione cuius sit PR transuersa diameter, atque ad ipsam productam, vbi opus, ordinatim applicata CO, etiam & rectæ FE, DG erunt a sectione ad eandem PR ordinatim applicatæ. Idemque & puncta A, B, C, D, E, in eadem erunt sectione cuius sit PR transuersa diameter ad contiguam in angulo LOC parametrum se habens velut POR rectangulum ad OC quadratum. Et si quidem maior est ratio rectanguli AHE ad rectangulum BID ratio, quàm rectæ CH ad rectam CI, erit quæsita sectio hyperbola. At si contra, ellipsis, vel circuli circumferentia. Existentibus autem angulo MID recto, & æqualibus BID, MIC rectangulis; tunc erit per puncta A, B, C, D, E quæsita sectio circuli circumferentia. Sin autem ellipsis. Sed & eodem modo demonstrabitur notatos quinque similiter positos eiusdem diei vmbrarum terminos in eadem hyperbola, vel ellipsi, aut etiam circuli circumferentia consistere. Quare ex similiter vtrobique positis quinis in sectione punctis, erit descripta per A, B, C, D, E puncta sectio formatæ ab acumine vmbræ sectioni, siue hyperbolæ, siue ellipsi, vel etiam circuli circumferentiæ, ex antecedente, similis. Et ideo huic etiam casu problemati satisfactum.

At vero si propositorum quinque A, B, C, D, E punctorum nulla binis æquidistantibus rectis iungantur vt in postremis figuris, iunctæ AD, BE inuicem sese secent in puncto F: ductaque ad AD recta CG æquidistans BE producatur in H, vt rectangulum CGH sit ad rectangulum AGD, veluti rectangulum BFE ad rectangulum AFD. Erunt igitur, ex coroll. ad 27 huius, sex A, B, C, D, H, E puncta in eadem coni sectione. Quare rursus



è datis quinque B, C, D, H, E punctis, quarum BE, CH binis æquidistantibus rectis iunguntur, conuenientia cum sectione, vt in primo casu, examinabitur, & similem describendæ eadem ratio sortietur. Sed &, vt in posteriori antecedentis prop. casu demonstratum est, è notatis quinque vmbrarum terminis similiter positis ipsis A, B, C, D, E punctis datis, eadem ratione & sextus assignabitur terminus similiter se habens ad reliquos quinque, veluti & hic punctum H ad quinque reliqua. Igitur, & eodem modo nouem vmbrarum terminum eadem esse, vel parabola, vel hyperbola, vel ellipsi, aut etiam circuli circumferentia probabimus. Et ex similiter positis vtrobique in sectione quinis punctis descripta per B, C, D, H, E puncta sectio sectioni ab vmbræ penicillo delineatæ, siue parabolæ, siue hyperbolæ, aut ellipsi, vel etiam circuli circumferentiæ similis ostendetur. Ideoque & omnimode problemati satisfactum erit. Quod facere oportebat.



MONITVM

Priusquam etiam ex huiusce agri lustratione pedem efferimus, neque iniucundum, neque inutile duximus è nostris ad Archimedis Conoidea & Sphæroidea Paralipomenis, siue manu supplementis, mutuatum insigne hoc vnicum sequens theorema huc congerere pro singulari binarum hyperbolarum similium examine, & ad inuicem comparatione. Erit autem huiusmodi.

THEOR. XXX. PROP. XXXV.

Si in hyperbola recta quæpiam ducatur alterutri Asymptoto æquidistans, binasque rectas qualcunque æquidistantes in sectione ductas diuidens; erunt rectangula sub æquidistantium partibus vtrinque sectione terminatis inuicem, veluti rectæ Asymptoto æquidistantis partes à sectione sumptæ inuicem.

Sit hyperbola A B C, & in ipsa binæ quælibet rectæ inuicem æquidistantes A C, D B. Sint autem eiusdem Asymptoti H I, H K:

& du

& ducta BF æquidiſtans HI rectas AC, DE diuidat, illam in F, hanc in G. Dico vt BF ad BG, ita eſſe rectangulum AFC ad rectãgulum DGE.

Productæ AC, DE ex vtraq; parte Aſymptotis occurrant, illa in I & K, hæc in L & M: eiſdemque occurrat in N & O recta NBO ducta per B rectis AC, DE æquidiſtans: & producta FB Aſymptoto HK occurrat in P. Igitur vt PB ad PF, ita erit BO ad FK: & ita rectangulum NBO, hoc eſt, ex 39 I hujus, rectangulum IAK ad rectangulum IFK; & diuidendo vt PB ad BF, ita erit NBO, ſiue IAK rectangulum ad AFC rectangulum. Similiter vt PB ad PG, ita erit BO ad GM, & ita NBO, ſiue LDM, rectangulum ad rectangulum LGM: atque etiam diuidendo vt PB ad BG, ita erit LDM rectangulum ad rectangulum DGE. Quare ex æquali vt BF ad BG, ita erit AFC rectangulum ad rectangulum DGE. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XXXI. Prop. XXXVI.

Si in hyperbola recta quæpiam ducatur binas rectas æquidiſtantes in ſectione ductas ita diuidens, vt eadem ſit rectangulorum ſub æquidiſtantium partibus vtrinque ſectione terminatis ad inuicem ratio, quæ reſpondentium ductæ rectæ partium à ſectione ſumptarum ad inuicem; erit recta eiuſmodi ducta alterutri ſectionis Aſymptoto æquidiſtans.

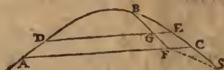
Sit hyperbola ABC, & in ipſa binæ æquidiſtantes ductæ rectæ AC, DE: A puncto autem B, ducta recta BF diuidens AC in F, & DE in G, faciat rectangulum AFC ad rectangulum DGE veluti BF ad BG. Dico rectam BF alterutri ſectionis Aſymptoto eſſe æquidiſtantem.

Si enim non eſt æquidiſtans, aut cum ſectione ſemel tantùm in eodem B puncto conueniet vt diameter, vel diametro cuipiam æquidiſtans, aut producta cum ſectione rurſus in alio præter B puncto conueniet.

Si quidem igitur BF diameter eſt, aut diametro æquidiſtans; minor

erit ratio BF ad BG, quàm rectanguli AFC ad rectangulum DGE: hoc enim in 34 hujus, & ad eam 3 coroll. jam ostensum est. Sed ponitur eadem. Igitur & eadem erit, & minor. Quod est absurdum.

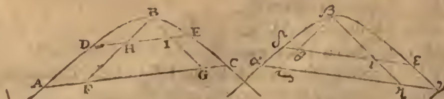
Si verò BF producta sectioni occurrat; sit occursus, si fieri potest, in S. Igitur ex demonstratis in 27 huius, vt rectangulum AFC ad rectangulum DGE, ita erit rectangulum BFS ad rectangulum BGS. Maior autem est rectanguli BFS ad rectangulum BGS ratio quàm BF ad BG: quoniam & FS maior est quàm GS. Igitur & maior erit rectanguli AFC ad rectangulum DGE ratio quàm rectæ BF ad rectam BG, quod rursus est absurdum: ponitur enim eadem. Quoniam igitur BF neque diameter est, aut diametro æquidistans, neque in sectione ducta, aut cuipiam sectionem contingenti æquidistans, necesse est, ex demonstratis in 29 & 41 primi huius, vt Asymptoto alterutri sit æquidistans. Quod erat demonstrandum.



THEOR. XXXII. PROP. XXXVII.

Si sint binæ hyperbolæ, & à sumpto quolibet in vtraque sectione puncto binæ rectæ ducantur quæ binas quascunque rectas æquidistantes in sectione ductas ita diuidant, vt eadem sit vtrobique binorum quorumlibet rectangulorum sub æquidistantium segmentis ad easdem partes factis adinuicem ratio, quæ intersegmentorum adinuicem: atque etiam angulus abs ductis vnius contentus æqualis angulo alterius ductis contento; erit altera alteri hyperbola similis.

Sint binæ hyperbolæ ABC, $\alpha\beta\gamma$, & in ipsarum vtraque binæ



æquidistantes quæcunque ductæ AC, DE, & $\alpha\gamma$, $\delta\epsilon$: à sumpto autem quolibet in sectione ABC puncto B ductis binis BF, BG rectis, quæ rectam AC secent in F & G, & rectam DE in H & I, sit vt FG ad HI, ita rectangulum AFC ad rectangulum DHE

atque ita rectangulum AGC ad rectangulum DIE: similiter à sumpto quocunque in sectione $\alpha\beta\gamma$ puncto β ductis binis $\beta\zeta$, $\beta\eta$ rectis secantibus $\alpha\gamma$ quidem in ζ & η, & $\delta\epsilon$ in θ & ι, sit vt $\zeta\eta$ ad $\theta\iota$, ita rectangulum $\alpha\zeta\gamma$ ad rectangulum $\delta\theta\epsilon$: atque etiam ita rectangulum $\alpha\eta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\epsilon$. Sitque angulus $\zeta\beta\eta$ æqualis angulo FBG. Dico hyperbolam $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ ABC esse similem.

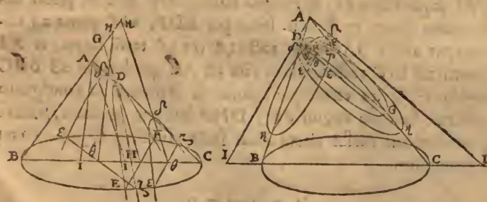
Quoniam enim in sectione ABC, vt FG ad HI, hoc est vt BF ad BH, siue vt BG ad BI, ita est rectangulum AFC ad rectangulum DHE: atque etiam ita rectangulum AGC ad rectangulum DIE; erit, ex antecedente, vtraque BF, BG Asymptoto æquidistans: angulusque FBG æqualis angulo ab Asymptotis contento. Similiter & vtraque $\beta\zeta$, $\beta\eta$ ostendetur Asymptoto æquidistans: ideoque & angulus $\zeta\beta\eta$ æqualis angulo ab Asymptotis hyperbolæ $\alpha\beta\gamma$ contento. Est autem $\zeta\beta\eta$ angulus angulo FBG æqualis. Quare, per 20 huius, erit hyperbola $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ ABC similis. Quod erat demoustrandum.

THEOR. XXIII. PROP. XXXVIII.

Si conus binis æquidistantibus, aut inuicem subcontrariè positis planis secetur non per verticem; erit factarum in superficie coni sectionum altera alteri similis.

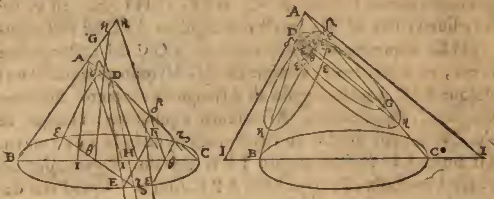
Hoc autem iam patet in binis parabolis, & in binis circulorum circumferentijs.

Sit igitur conus ABC, qui duobus planis, vt proponuntur, non per A verticem secetur, & sint factæ in superficie binæ EDF, $\epsilon\delta\zeta$ sectiones hyperbolæ, siue ellipses. Dico hyperbolam $\epsilon\delta\zeta$ hyperbolæ, siue ellipsi, EDF esse similem.



Si quidem plana per EDF $\epsilon\delta\zeta$ primùm sunt æquidistantia, erunt

& communes ipsorum cum base coni sectiones etiam æquidistantes. Sint ipsæ EF, εζ: seceturque rursus ABC conus, aut sectus intelligatur, plano per axem ad rectos basi angulos quod communem in base sectionem faciat rectam BC ad ipsas EF, εζ, perpendicularem. Sint autem & communes planorum EDF, εδζ, & trianguli per axem



sectiones rectæ GDH, ηδθ, quæ & inuicem erunt parallelæ. Ipsis à coni vertice A æquidistans ducatur AI. Quoniam igitur vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita est GD transuersa diameter sectionis EDF ad contiguam parametrum, & ita ηδ transuersa sectionis εδζ diameter ad suam contiguam parametrum. Suntque vtrobiq; anguli ab ordinatim ad diametrum ductis facti ipsis DHE, δθε angulis rectis, ideoque & inuicem æqualibus, æquales, etenim & ipsæ EHF, εθζ sunt ordinatim ad ipsas DH, δθ diametros applicatæ. Igitur, per 4 hujus, erit hyperbola, vel ellipsis, εδζ hyperbolæ, vel ellipsi, EDF similis. Quod 1° erat demonstrandum.

At si plana proponantur inuicem subcontrariè posita; erit & δθ diameter subcontrariè posita diametro DH, constituetque triangulum ηαδ triangulo GAD simile, & subcontrariè positum. Ducatur igitur AI æquidistans δθ, & reliqua fiant eadem quæ in priori casu. Quoniam igitur ex definit. binæ per EDF, εδζ plana ad triangulum per axem BAC sunt recta: &, ex 11ª tertij hujus, vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita est AI quadratum ad BIC rectangulum: & ita vtrobique transuersa diameter ad contiguam parametrum: suntque anguli δθζ, DHF inuicem æquales, scilicet recti; concludetur rursus altera alteri sectio similis. Quod 2° erat demonstrandum.

ALITER.

Sed & quoniam in proximè antecedente libro subcontrariæ sectiones plurimæ exhibitæ sunt eædem inuicem, variæque ibidem methodi traditæ pro iisdem exhibendis. Si propositarum binarum in

hoc

hoc theoremate ſubcontrariarum inuicem ſectionum alterutri eadem exhibeatur in eodem cono ſubcontraria ſectio, erit illa haud dubiè alteri ſubcontrariè poſitæ æquidiſtans, ideoque & ſimilis. Quare & ſubcontrariè jnuicem poſitæ ſectiones, inuicem etiam, ex ſupra oſtenſis, ſimiles erunt.

COROLL.

Hinc liquidò conſtat binarum à duobus æquidiſtantibus planis, aut inuicem ſubcontrariè poſitis in eiuſdem coni ſuperficie factarum ſectionum, ideoque inuicem ſimilium, ſimiles etiam in communi per axem triangulo diametros eſſe.

MONITVM.

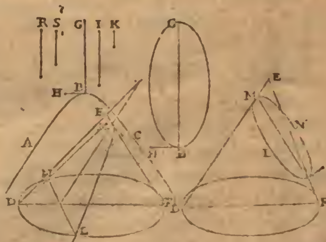
Hinc etiam ſatìs fit euidens, quàm parum æquus rerum conicarum æſtimator fuerit David Riualtus à Flurantia Archimedis operum infœlix Scholiaſtes, qui multa ad eiuſdem Conoïdea præſertim & Sphæroidea commentus eſt à veritate prorſus aliena. Quale eſt illud à nobis ſupra notatum ipſius de ſimilium coni-ſectionum definitionibus examen. Atque etiam iſtud de binis ſimilibus in eodem cono hyperbolis pronunciatum, quod cum binas æquidiſtantes, ſiue à duobus planis æquidiſtantibus in eiuſdem coni ſuperficie formatas, atq; ideo parallelas habentes in eodem cono diametros, inuicem ſimiles expoſuiſſet. & demonſtraſſet; etiam & conuerſum aggreſſus oſtendere, ipſum vt demonſtratum auſus eſt publicare, & ſuis ibidem commentariis mandare: ſcilicet, Et omnes ſimiles hyperbolas in eiuſdem coni ſuperficie formatas, inuicem æquidiſtantes eſſe, & in eodem cono parallelas habere diametros. *Ipſum ſiquidem latuit binarum, ſiue earumdem inuicem, ſiue ſimilium hyperbolarum ſubcontraria in eiuſdem coni ſuperficie poſitio. Vereor ne & ipſi non ſatìs cognita fuerit binarum ellipſium ſubcontrariarum ſcientia. Cæterùm quandoquidem nihil tam ſimile ſubjecto cuilibet dici aut videri poßit, quàm quod idem eſſe cum ipſomet ſubiecto poſſumus euincere; Jdcirco pleraq; quæ inſti-*

tuti de ſimilibus inuicem coni-ſectionibus examinis propriæ videri potuerant præoccupauit ſibi vindicare abſoluta iam ſuperiori libro de earumdem inuicem coni-ſectionum comparatione, atque etiam de ipſarum, ſiue in plano, ſiue in coni ſuperficie, expoſitione tractatio. Quod hìc ſaltem vt notari debuit, ita tantùm monuiſſe ſufficiens videri poſſit. Equidem quotquot ferè examinis ſiue deſcriptionis methodos proximè antecedente libro proſecuti ſumus, eaſdem & præſenti tractationi accommodare vnicuique ſatìs liberum erit, & perfacile. Quod vno & altero exemplo neq; inutile neq; ingratum fortè fuerit experiri.

PROB. II. PROP. XXXIX.

Dato cono; in eiuſdem ſuperficie datæ hyperbolæ, aut ellipſi, ſimilem in data diametrorum ratione hyperbolam, aut ellipſim, exhibere.

Oportet autem vt conus propoſitus ſit eiuſmodi, ſaltem pro hyperbola exhibenda, vt, cum ſecabitur plano ad baſim recto, non minor ſit quadrati biſecantis angulum trianguli per axem ad rectangulum ſub eiuſdem baſis partibus ab eadem biſecante factis ratio, quàm tranſuerſi propoſitæ hyperbolæ axis ad rectam parametrum.



Sit igitur data hyperbola, ellipſiſue, A B C: dataq; ratio R ad S. Datus autem ſit conus E D F, in cuius ſuperficie exhibenda ſit hyperbola aut ellipſis datæ A B C hyperbolæ aut ellipſi ſimilis, ita vt exhibitæ in coni E D F ſuperficie ſectionis diameter ſe ad diametrum propoſitæ ſectionis A B C habeat veluti R ad S.

Exponantur ſectionis A B C tranſuerſus axis B G, & recta parameter B H: vtq; R ad S, ita fiat B G ad rectam I, & B H ad rectam K. Deinde ſectioni, ſiue hyperbolæ ſiue ellipſi, cuius ſit

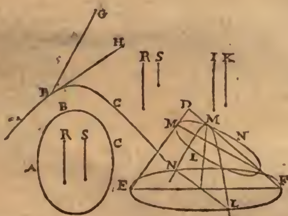
transuersus axis I, & recta parameter K, in propositi E D F coni superficie eadem exhibeatur sectio per 40. aut 41. tertij hujus, & sit illa L M N. Dico sectionem L M N problemati satisfacere.

Quoniam enim sectionis L M N transuersus axis est æqualis I, & recta parameter æqualis rectæ parametro K: estq; I ad BG, veluti K ad B H: & permutatim vt B G ad B H, ita est I ad K, vtrobique scilicet eadem transuersi axis ad rectam parametrum ratio; erit, ex 4 hujus, exhibita in dati E D F coni superficie sectio LMN, siue hyperbola, siue ellipsis propositæ ABC hyperbolæ, siue ellipsi, similis in data R ad S diametrorum ratione. Quod facere oportebat.

PROB. III. PROP. XL.

Data hyperbola aut ellipsi; conum exhibere, & in eiusdem superficie sectionem eidem datæ hyperbolæ aut ellipsi similem in data diametrorum ratione.

Sit data hyperbola, ellipsisue, A B C: & data ratio R ad S. Oporteatque conum exhibere in cujus superficie sit sectio datæ A B C sectioni similis, cuius diameter ad sectionis A B C diametrum se habeat vt R ad S.



Exhibeatur sectionis A B C diameter quæcunque transuersa B G, eidemq; contigua parameter B H: vtque R ad S, ita fiat B G ad I, & BH ad K: Atque è datis I & K rectis terminatis in dato GBH angulo inuicem iunctis exhibeatur per 48 vel 50 tertij hujus conus E D F, & in ejus superficie sectio LMN, siue hyperbola, siue ellipsis, cujus sit transuersa diameter recta I, & contigua parameter recta K, vertexq; ipsarum connexionis punctum, in qua ad eandem transuersam diametrum, vbi opus productam, ordinatim à sectione ductæ in dato GBH angulo applicentur. Dico conum EDF, & in eius superficie exhibitam sectionem LMN, problemati satisfacere.

Quoniam enim exhibitæ LMN ſectionis tranſuerſa diameter eſt I, & contigua parameter K: Eſtq; I ad BG, veluti K ad BH: & permutatim vt BG ad BH, ita eſt I ad K: vtrobiq; ſcilicet eadem tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum ratio: atque etiam angulus ab ordinatim ad I diametrum ductis factus æqualis angulo GBH, qui ab ordinatim ad GB diametrum applicatis continetur. Erit, ex 4. hujus, in exhibiti EDF coni ſuperficie ſectio LMN, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, propoſitæ ABC ſectioni, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſi, in data R ad S diametrorum ratione ſimilis. Quod facere oportebat.

QVARTI LIBRI FINIS.